Zur projektiven Dreiecksgeometrie in sphärischen Koordinaten

von

P. Ulrich Wildhaber O. S. B.

1912
Druck von Eberle & Rickenbach Einsiedeln

Zur projektiven Dreiecksgeometrie in sphärischen Koordinaten.

Jnaugural-Dissertation der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Freiburg in der Schweiz zur Erlangung der Doktorwürde vorgelegt von

P. Ulrich Wildhaber O. S. B.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

1912

Druck von Eberle & Rickenbach, Einsiedeln.

Diese Arbeit wurde nach Rat und Anleitung des Herrn Professors Dr. Daniels in Freiburg ausgeführt. Der Verfasser erlaubt sich daher, auch an dieser Stelle seinem hochverehrten Lehrer den wärmsten Dank auszusprechen, sowohl für das wohlwollende Interesse, das er ihm die ganze Studienzeit hindurch gezeigt, als auch für die unvergleichlichen Vorlesungsstunden, die speziell für den künftigen Lehrer doppelt wertvoll waren.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545317_0076

Zur projektiven Dreiecksgeometrie in sphärischen Koordinaten.

Einleitung.

Ansätze zur Einordnung der gewöhnlichen Metrik in die Projektivität finden sich schon bei Poncelet und Laguerre. „Poncelet hat bereits metrische Beziehungen zu den Kreispunkten der Ebene oder zu dem Kugelkreis des Raumes betrachtet," aber die projektive Definition der Entfernung und des Winkels hat er noch nicht gekannt. Erst Laguerre hat die berühmte Formel entdeckt, welche die rein projektive Definierung dieser metrischen Begriffe gestattete, indem der Winkel, den zwei Gerade mit einander bilden, durch den mit $\frac{1}{2}$ i multiplizierten Logarithmus des D. V. (Doppelverhältnis) ausgedrückt wird, das zwischen den beiden Geraden und jenen Geraden besteht, welche von ihrem Schnittpunkt aus durch die beiden zyklischen Punkte gezogen werden können. „Dies ist aber bei Laguerre noch keine (rein projektive) Definition des Winkels, weil ihm die von v. Staudt'sche Festsetzung des D. V. als einer durch eine projektive Konstruktion festgelegten Zahl fehlt." [1])

Den Schlüssel zur vollkommenen Lösung der Frage hat Cayley geboten, als er seine Massgeometrie schuf. Der Reihe nach betrachtete er die Massbestimmung in den Grundgebilden der ersten, zweiten und dritten Stufe. In jeder Stufe nimmt er irgend ein Gebilde zweiten Grades an, das er als das absolute bezeichnet, und in Bezug auf dasselbe definiert er dann den Begriff von Entfernung und Winkel. So wählt er für die Grundgebilde erster Stufe (Punktreihe, Geradenbüschel und Ebenenbüschel) zwei willkürliche (reelle oder konjugiert imaginäre) Elemente P und Q (Punktpaar oder Geradenpaar oder Ebenenpaar) als absolutes Gebilde:

$$\Omega\,(zz) \equiv a_{11}z_1^2 + 2\,a_{12}z_1z_2 + a_{22}z_2^2 = 0$$

[1]) Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften III, 1, S. 82 ff.

Nun lässt sich mit Felix Klein das Intervall (Entfernung oder Winkel) zweier Elemente A (x) und B (y) durch den mit einer willkürlichen Konstanten multiplizierten Logarithmus des D. V. der beiden Elemente in Bezug auf das absolute Paar definieren:

$$D_{xy} \equiv k \log (ABPQ) = k \log \frac{\Omega(xy) + \sqrt{\Omega^2(xy) - \Omega(xx)\,\Omega(yy)}}{\Omega(xy) - \sqrt{\Omega^2(xy) - \Omega(xx)\,\Omega(yy)}},$$

wo $\Omega(xy)$ die Polarform

$$\Omega(xy) \equiv x_1 (a_{11}y_1 + a_{12}y_2) + x_2 (a_{12}y_1 + a_{22}y_2)$$

und k den willkürlichen konstanten Faktor bedeutet.

Hieraus ergeben sich zwei verschiedene allgemeine Massbestimmungen: die elliptische und die hyperbolische, je nachdem die Diskriminante von $\Omega(zz)$ das negative oder positive Zeichen annimmt. Lässt man die beiden Grundelemente P und Q zusammenfallen, so erhält man eine parabolische Massbestimmung.

Zur Massbestimmung in den Grundgebilden zweiter Stufe benützt Cayley als absolutes Gebilde auf der Ebene einen Kegelschnitt, den er den absoluten Kegelschnitt nennt:

$$\omega(xx) \equiv \omega_{11}x_1^2 + \omega_{22}x_2^2 + \omega_{33}x_3^2 + 2\,\omega_{12}x_1x_2 + 2\,\omega_{23}x_2x_3 + 2\,\omega_{31}x_3x_1 = 0$$
$$\Omega(uu) \equiv \Omega_{11}u_1^2 + \Omega_{22}u_2^2 + \Omega_{33}u_3^2 + 2\,\Omega_{12}u_1u_2 + 2\,\Omega_{23}u_2u_3 + 2\,\Omega_{31}u_3u_1 = 0$$

als absoluten Ordnungs- und Klassenkegelschnitt. Die Entfernung zweier Punkte wird nun definiert in der von F. Klein gegebenen Fassung durch

$$D_{xy} = k \log \frac{\omega(xy) + \sqrt{\omega^2(xy) - \omega(xx)\,\omega(yy)}}{\omega(xy) - \sqrt{\omega^2(xy) - \omega(xx)\,\omega(yy)}}$$

und dual dazu der Winkel zweier Geraden durch

$$A_{uv} = k' \log \frac{\Omega(uv) + \sqrt{\Omega^2(uv) - \Omega(uu)\,\Omega(vv)}}{\Omega(uv) - \sqrt{\Omega^2(uv) - \Omega(uu)\,\Omega(vv)}}.$$

Hieraus leitet F. Klein durch Diskussion der möglichen Fälle und durch geeignete Wahl der Konstanten k wieder die drei Arten projektiver Massbestimmung ab: die elliptische, hyperbolische und parabolische.

Für die Grundgebilde dritter Stufe (Raum) wird eine beliebige Fläche zweiten Grades als absolutes Gebilde eingeführt.

Es ist speziell das Verdienst F. Klein's gezeigt zu haben, wie mit Hilfe der Prinzipien von Cayley und der Würfe von v. Staudt die gesamte Geometrie und insbesondere die gewöhnliche Metrik einwurfsfrei rein projektiv aufgebaut werden kann. Die genannten Forscher haben aber nur die prinzipielle Frage gelöst; zur systematischen Spezialbehandlung der geometrischen Lehrsätze, welche metrische Begriffe

enthalten, hat unter anderen G. Berkhan einen bemerkenswerten Beitrag geliefert in einer der Königsberger philosophischen Fakultät 1904 vorgelegten Preisarbeit, von der im Archiv der Mathematik und Physik III, 11, 1907 ein knapper Auszug erschienen ist. Berkhan beschränkte sich dabei auf die ebene Dreiecksgeometrie, deren metrische Sätze er zunächst nach einem rein projektiven Ordnungsprinzip einteilt und dann von einer grösseren Anzahl den rein projektiven Beweis entwickelt. Er zerlegt die metrischen Sätze der Dreiecksgeometrie in drei Klassen je nach der Rolle, welche das Kreispunktepaar in denselben spielt. In manchen Sätzen braucht man nämlich nicht die Kreispunkte selber, sondern nur ihre Verbindungslinie, die unendlich ferne Gerade; in anderen Sätzen lässt sich das Kreispunktepaar durch einen Kegelschnitt ersetzen, wobei es aber belanglos bleibt, ob er in ein Punktepaar zerfalle oder nicht. Endlich gibt es eine Anzahl Sätze, deren Beweis in Bezug auf die zyklischen Punkte selber zu führen ist.

Dabei führt nun aber Berkhan die Verallgemeinerung ein, dass er für die erste Kategorie von Sätzen die unendlich ferne Gerade durch eine im Endlichen gelegene beliebige Gerade ersetzt, für die zweite statt der zyklischen Punkte einen ganz beliebigen Kegelschnitt als absolutes Gebilde wählt, welchen er für die Sätze der dritten Klasse in zwei willkürliche Punkte entarten lässt.

Berkhan geht von den harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks aus, und nachdem er gezeigt, wie stets vier Gebilde eng zusammengehören: ein Punkt, eine Gerade, ein Umkegelschnitt und ein Inkegelschnitt des Grunddreiecks, definiert er mit Hilfe der „absoluten Geraden" jene metrischen Begriffe, zu deren Definition sonst die unendlich ferne Gerade benötigt wird. So nennt er Richtpunkte einer Geraden, einer Kurve, die Schnittpunkte derselben mit der absoluten Geraden. Von zwei Geraden sagt er, sie seien parallel, wenn sie sich auf der absoluten Geraden schneiden; zwei Dreiecke befinden sich in Aehnlichkeitslage, wenn ihre homologen Seiten die Richtpunkte gemeinsam haben, und zwei Kegelschnitte heissen homothetisch, wenn ihre Richtpunkte zusammenfallen. Als Zentrum eines Kegelschnitts bezeichnet er den Pol der absoluten Geraden in Bezug auf diesen Kegelschnitt. Unter Asymptoten eines Kegelschnitts versteht er die Tangenten an seinen Richtpunkten. Mitte einer Strecke heisst der mit dem Richtpunkt in Bezug auf die Streckenendpunkte harmonisch konjugierte Punkt. Die Geraden, welche die neuen Seitenmitten des Dreiecks mit den gegenüberliegenden

Eckpunkten verbinden, heissen demnach die Mittellinien und ihr gemeinsamer Schnittpunkt der Schwerpunkt des Dreiecks; usw.

Wie man sieht, haben alle diese Begriffe einen neuen allgemeineren Sinn bekommen als in der gewöhnlichen Geometrie. Die gewöhnliche Bedeutung geht nun als Spezialfall daraus hervor, wenn man nämlich die spezielle unendlich ferne Gerade als absolute Gerade wählt.

Auf Grund dieser Definitionen verallgemeinert sodann Berkhan im ersten Abschnitt seiner Arbeit einzelne Sätze aus der affinen Geometrie, wie z. B. solche, die sich auf die zum Schwerpunkt gehörenden Steiner'schen Ellipsen, die Theorie der komplementären und antikomplementären Punkte beziehen, einzelne Sätze, die auf quadratischer Verwandtschaft beruhen, wie die isotome und komplementisotome Verwandtschaft. Ferner gibt er eine interessante Verallgemeinerung der Lehrsätze von Feuerbach und Tucker.[1])

Im zweiten Abschnitt wendet sich Berkhan dem Falle zu, wo das absolute Gebilde aus einem allgemeinen Kegelschnitt

$$\Sigma\, a_{ik}x_i x_k = 0 \quad \text{resp.} \quad \Sigma\, \alpha_{ik}u_i u_k = 0$$

besteht, der weder in ein Punktpaar noch in ein Geradenpaar zerfallen ist. Hier definiert er zunächst die Orthogonalität zweier Geraden, indem er dieselben dann als zu einander senkrecht bezeichnet, wenn sie in Bezug auf den absoluten Klassenkegelschnitt harmonisch konjugiert sind. Ferner führt er nun den Begriff des Winkels ein, den er nach Cayley und Klein durch das Produkt aus einer Konstanten und dem Logarithmus des D. V. definiert, das diese Geraden mit den von ihrem Schnittpunkt ausgehenden absoluten Tangenten bilden. Daraus folgen von selbst die Begriffe der Winkelhalbierenden, Dreieckshöhen, usw. Hierauf behandelt er eine Anzahl Sätze, in denen diese Begriffe eine Rolle spielen, so z. B. Sätze über die Dreieckshöhenpunkte, über orthologische Dreiecke, isogonale Verwandtschaft, isotome Verwandtschaft, Inkreise, Wallacelinie, Spiegelung eines Punktes und einer Geraden an den Seiten des Dreiecks, die Brocard'schen Punkte. In einzelnen Fällen prüft er noch an Hand des gefundenen Resultats, was eintritt, wenn der absolute Kegelschnitt in ein Punktpaar zerfällt.

Im dritten Abschnitt wird eine Anzahl Lehrsätze verallgemeinert, für welche der absolute Kegelschnitt in ein absolutes Punktpaar zerfallen muss. Diese Voraussetzung ist nämlich zur Behandlung

[1]) In anderer Weise ist die Erweiterung des Satzes von Tucker auch enthalten in Fr. M. Daniels, Essai de géométrie sphérique, Fribourg 1907, chap. XI.

derjenigen Sätze notwendig, in denen Orthogonal- und Parallelrelationen gleichzeitig auftreten oder in denen Kreise als Punktörter eine Rolle spielen. Hier wird der Kreis definiert als diejenige Kurve zweiter Ordnung, welche durch drei Punkte in allgemeiner Lage und durch die beiden absoluten Punkte geht. Zur Besprechung kommen in diesem Teile einige Beziehungen, die sich an den Höhenpunkt, den Lemoine'schen Punkt und den Umkreis anknüpfen, ferner die Theorie der Zwillingspunkte, der tripolar assoziierten Punkte, Aufsatzdreiecke, der Brocard'sche Kreis, die Theorie der isogonischen und isodynamischen Punkte, die Brocard'schen Gebilde im Sinne von Artzt. Wie schon in den beiden vorhergehenden Teilen, so werden besonders auch hier häufig nur die Resultate der Untersuchungen angegeben ohne die Beweise.

Berkhan's Arbeit bezieht sich nur auf die *ebene* Dreiecksgeometrie. Es kann aber seinen Untersuchungen eine etwas allgemeinere Bedeutung gegeben werden durch die Ausdehnung auf die Kugel, so dass dann die Geometrie der Ebene nur als Spezialfall davon erscheint. Dies ist nun der Zweck der vorliegenden Dissertation. Sie will den Nachweis liefern, dass die meisten Ausführungen Berkhan's fast unverändert auch auf der Kugel Geltung haben. Auf diese Weise gelingt es, auch auf der Sphäre von Parallelismus und ähnlichen Dreiecken zu reden, gerade wie auf der Ebene, während dies in der gewöhnlichen sphärischen Geometrie unmöglich ist. Die sphärische Verallgemeinerung der imaginären zyklischen Punkte der Ebene führt aber auf einen imaginären sphärischen Kegelschnitt, die sogenannte zyklische Kurve, welche nicht zerfallen kann.[1]) Daher wird auf der Kugel der dritte Teil der Berkhan'schen Arbeit gegenstandslos, hier gibt es keine parabolische Geometrie. Der Spezialfall der gewöhnlichen sphärischen Geometrie wird schon erreicht, wenn die zyklische Kurve als absoluter Kegelschnitt gewählt wird. Hieraus erklärt sich auch die vollkommene Herrschaft des Dualitätsprinzips auf der Kugel.

Noch weniger als bei Berkhan kann es sich hier um eine vollständige Arbeit handeln, die Beschränkung auf die Verallgemeinerung einzelner Sätze ist auch da geboten. Was die vorliegende Dissertation von der Berkhan'schen Arbeit besonders unterscheiden wird, das ist die Methode der Behandlung.

In dem 1907 erschienenen Buche *Essai de géométrie sphérique en coordonnées projectives* hat Herr Professor *Daniels* in Freiburg (Schweiz) die analytische Geometrie auf der Sphäre behandelt in homogenen projektiven sphärischen Koordinaten mit Verwendung der

[1]) M. Fr. Daniels, Essai de géométrie sphérique, § 183.

Vektoren. Dabei hat es sich gezeigt, wie sehr sich die letzteren für die sphärische Geometrie eignen, wie dadurch viele Beweise und Entwicklungen bedeutend kürzer und eleganter werden. Es lag nun nahe, dieselben auch für diese Arbeit zu verwenden, allein dies ging nicht ohne weiteres an, weil ein Vektor ein wesentlich metrischer Begriff ist, indem er nicht bloss die Bedeutung einer Richtung, sondern auch die einer Länge in sich schliesst. Ueberdies treten bei den Vektoroperationen auf der Sphäre beständig Winkel- oder Bogenrelationen auf, also wieder wesentlich metrische Begriffe. Um uns einerseits von diesen metrischen Beziehungen unabhängig zu machen und andererseits uns doch die Vorteile der Vektorenrechnung zu wahren, benützen wir die „Punktsymbole", die wir einer uns gütigst zur Verfügung gestellten nicht veröffentlichten Arbeit von Herrn Professor Daniels entnehmen. Im folgenden Kapitel werden die Eigenschaften und Operationssätze der Punktsymbole kurz auseinander gelegt werden. Es wird sich herausstellen, dass es sich dabei um eine projektive Verallgemeinerung der gewöhnlichen Grassmann'schen Punktgrössen handelt. Es wird dieselbe Notation wie in der Vektorenanalysis angewendet, so dass in manchen Fällen der Uebergang zur gewöhnlichen Metrik ganz unmittelbar bloss durch andere Interpretation der Grössen erreicht wird.

Theorie der Punktsymbole.

1. Bekanntlich kann jeder beliebigen positiven ganzen Zahl und durch Verallgemeinerung des Prinzips überhaupt jeder beliebigen reellen Zahl ein und zwar nur *ein* Punkt einer ebenen Geraden zugeordnet werden, sobald auf derselben drei willkürliche Punkte fest gewählt sind. Und zwar können wir, von diesen drei Punkten ausgehend, alle übrigen durch blosses wiederholtes Aufsuchen des vierten harmonischen Punktes, also durch blosse Konstruktion, unabhängig von jeder Messung, finden.[1]) Diese Ausführungen gelten aber nicht bloss für die Ebene, sondern auch für die Kugelfläche.[2])

Demnach wird jeder Punkt einer sphärischen oder ebenen Geraden durch ein Doppelverhältnis von 4 Punkten eindeutig bestimmt. Diesen D. V. hat v. Staudt den Namen „Wurf" gegeben. Mit Hilfe dieser

[1]) W. Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie, I. S. 97 ff. Paderborn 1893.

[2]) Einen grössten Kugelkreis bezeichnen wir als „sphärische Gerade". — Auf der Kugel fällt die bei Killing a. a. O. S. 111 § 3, k erwähnte Schwierigkeit in der Zuordnung von Punkten an die negativen Zahlen dahin, weil die sphärische Gerade ein in sich geschlossenes Gebilde ist.

Würfe lässt sich jeder Punkt der Kugel finden ohne alle Messung, und somit sind wir im stande, die ganze analytische Geometrie in ganz allgemeiner Weise aufzubauen mit Ausschaltung aller Massbegriffe.

2. Zur Bestimmung der Lage eines Punktes auf der Kugel gehen wir von einem willkürlichen sphärischen Dreieck $A_1A_2A_3$ und einem Punkte E aus, welcher auf keiner der drei Geraden A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 liegt. Sei P der zu bestimmende beliebige Punkt. Wir ziehen durch ihn und durch E die Ecktransversalen, welche die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks in P_1, P_2, P_3, resp. E_1, E_2, E_3 schneiden. Nun können wir die Würfe $(A_1A_2P_3E_3)$, $(A_2A_3P_1E_1)$, $(A_3A_1P_2E_2)$ unabhängig von allen metrischen Betrachtungen bestimmen. Daher lassen sich auch drei Zahlen finden, x_1, x_2, x_3, deren Verhältnisse $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_2}, \frac{x_1}{x_3}$ gleich den genannten Würfen sind. Es hat folglich jeder Punkt der Kugel in Bezug auf ein sphärisches Fundamentaldreieck A drei homogene projektive Koordinaten $x_1x_2x_3$ oder kurz x_i, deren *Verhältnisse* den Punkt bestimmen.

Fällt P mit E zusammen, so wird auch P_i mit E_i identisch; folglich werden die drei D. V. $(A_iA_kP_lE_l) = 1$. Dadurch werden auch die Koordinaten $x_i = 1$, weshalb man E den Einheitspunkt nennt.

3. Nun betrachten wir alle Punkte der Kugel, deren Koordinaten die folgende gegebene quadratische Form annullieren:

$$\omega(xx) \equiv \omega_{11}x_1^2 + \omega_{22}x_2^2 + \omega_{33}x_3^2 + 2\omega_{12}x_1x_2 + 2\omega_{23}x_2x_3 + 2\omega_{31}x_3x_1.$$

Das Gebilde, welches durch diese Punkte dargestellt wird, nennen wir den *absoluten Kegelschnitt*. Bezüglich der Koeffizienten ist nur vorausgesetzt, dass die Diskriminante $\omega_{ik} \neq 0$ sei. Ist D der Wert derselben, so können wir uns alle Koeffizienten durch eine der dritten Wurzeln aus D dividiert denken. Bezeichnen wir den Wert, den die Diskriminante jetzt annimmt, mit Ω, so ist $\Omega = 1$. Diese Voraussetzung soll für alle unsere Entwicklungen gelten.

4. Genügen die Koordinaten x_i der linearen Gleichung:

$$\begin{aligned}\omega(xy) \equiv{}& x_1(\omega_{11}y_1 + \omega_{12}y_2 + \omega_{13}y_3) + x_2(\omega_{12}y_1 + \omega_{22}y_2 + \omega_{23}y_3) + \\ & x_3(\omega_{13}y_1 + \omega_{23}y_2 + \omega_{33}y_3) \equiv \omega(yx) \\ \equiv{}& y_1(\omega_{11}x_1 + \omega_{12}x_2 + \omega_{13}x_3) + y_2(\omega_{12}x_1 + \omega_{22}x_2 + \omega_{23}x_3) + \\ & y_3(\omega_{13}x_1 + \omega_{23}x_2 + \omega_{33}x_3) = 0,\end{aligned}$$

so sagen wir, der Punkt x_i liege auf der *absoluten Polare* eines gegebenen Punktes y_i, oder, da wir in der Gleichung x_i mit y_i vertauschen dürfen, der Punkt y_i liege auf der absoluten Polare eines gegebenen Punktes x_i. Wir können

$$\omega(xy) \equiv n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = 0$$

schreiben, und dieses Gebilde ist offenbar vollkommen bekannt, sobald wir zwei Punkte kennen, deren Koordinaten der Gleichung genügen. Das einzige Gebilde auf der Kugel, das schon durch zwei Punkte bestimmt ist, ist die sphärische Gerade. Es ist folglich die absolute Polare eines Punktes eine Gerade.

5. Ebenso muss $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ eine Gerade sein, die durch die leicht zu zeichnenden Punkte $(o, -u_3, u_2)$ und $(-u_2, u_1, o)$ geht. Wir nennen $u_1 u_2 u_3$ oder u_i oder damit proportionale Zahlen die homogenen projektiven Koordinaten der Geraden.

6. Sind zwei Punkte $Q'(y_i)$ und $Q''(z_i)$ gegeben, so können ihre absoluten Polaren:

$$\omega(yx) \equiv x_1 \omega'(y_1) + x_2 \omega'(y_2) + x_3 \omega'(y_3) = 0$$
$$\omega(zx) \equiv x_1 \omega'(z_1) + x_2 \omega'(z_2) + x_3 \omega'(z_3) = 0$$

leicht gezeichnet werden. Ihr Schnittpunkt R liegt sowohl auf der absoluten Polare von Q′ als auf derjenigen von Q″; umgekehrt müssen Q′ und Q″ nach § 4 auf der absoluten Polare von R liegen. Demnach ist $(Q'Q'')$ die Polare von R, und R ist der *absolute Pol* von $(Q'Q'')$.

7. Genügen die Punkte x_i und y_i beide der Gleichung der Geraden u_i

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

so genügt ihr auch jeder Punkt $y_i + \lambda x_i$ was auch λ sein mag. Wir finden die Schnittpunkte der Geraden $(x_i y_i)$ mit dem absoluten Kegelschnitte, indem wir nach der bekannten Methode von Joachimsthal aus

$$\omega(y + \lambda x, y + \lambda x) \equiv \omega(yy) + 2\lambda\omega(xy) + \lambda^2 \omega(xx) = 0$$

λ auflösen und in $y_i + \lambda x_i$ substituieren. Liegt y_i auf dem absoluten Kegelschnitt, so wird $\omega(yy) = 0$ und folglich eine Wurzel der in Bezug auf λ quadratischen Gleichung ebenfalls Null. Genügt überdies x_i der Gleichung $\omega(xy) = 0$, so wird auch die zweite Wurzel von λ Null, das heisst, wenn y_i auf dem absoluten Kegelschnitt liegt, so ist seine absolute Polare zugleich absolute Tangente.

Welcher Bedingung müssen die Linienkoordinaten u_i genügen, soll die Gerade u_i absolute Tangente sein? Offenbar der Bedingung:

$$\Omega(uu) \equiv \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & u_1 \\ \omega_{12} & \omega_{22} & \omega_{23} & u_2 \\ \omega_{13} & \omega_{23} & \omega_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\equiv \Omega_{11} u_1^2 - \Omega_{22} u_2^2 + \Omega_{33} u_3^2 + 2\Omega_{12} u_1 u_2 + 2\Omega_{23} u_2 u_3 + 2\Omega_{31} u_3 u_1 = 0.$$

$\Omega(uu) = 0$ ist demnach der *absolute Klassenkegelschnitt.*

8. Nun bezeichnen wir die Punkte x_i, y_i, z_i, . . . mit den Symbolen X, Y, Z, . . ., den Punkt $x_i + \lambda y_i$ oder $\lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i$ mit $\lambda_1 X + \lambda_2 Y$, was auch λ_1 oder λ_2 sein mag. X und $\lambda_1 X$ repräsentieren den nämlichen Punkt; denn $\lambda_1 X$ bedeutet nur, dass die Koordinaten von X noch mit λ_1 multipliziert seien. Da

$$\lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i \equiv \lambda_2 y_i + \lambda_1 x_i$$

so ist auch $\lambda_1 X + \lambda_2 Y \equiv \lambda_2 Y + \lambda_1 X.$

Weil ferner

$$\lambda_1 x_i + (\lambda_2 y_i + \lambda_3 z_i) \equiv (\lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i) + \lambda_3 z_i$$

so ist auch $\lambda_1 X + (\lambda_2 Y + \lambda_3 Z) \equiv (\lambda_1 X + \lambda_2 Y) + \lambda_3 Z.$

„Punktsymbole“ oder „Punktgrössen“ können folglich addiert und subtrahiert werden wie skalare Grössen.

9. Die Eckpunkte (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) des Koordinatendreiecks wollen wir mit R_1, R_2, R_3 bezeichnen. Nun aber ist

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3)$$

daher $$X = x_1 R_1 + x_2 R_2 + x_3 R_3.$$

Wir dürfen die Koordinaten eines Punktes x_i, der nicht auf dem absoluten Kegelschnitt liegt, durch $\sqrt{\omega(xx)}$ dividieren, weil dann $\omega(xx)$ einen von Null verschiedenen Wert annimmt. Und jetzt nennen wir x_i die nicht reduzierten, hingegen $\frac{x_i}{\sqrt{\omega(xx)}}$ die reduzierten Koordinaten des Punktes X.

10. Der Ausdruck $\omega(xy)$ ist eine bestimmte Funktion der Koordinaten von X und Y; wir wollen sie symbolisch mit X Y bezeichnen und „inneres Punktprodukt“ der beiden Symbole X und Y nennen. Aus dieser Definition folgt nun unmittelbar:

$$X Y \equiv \omega(xy) \equiv \omega(yx) = Y X$$
$$X X \equiv \omega(xx)$$
$$Z(X + Y) = \omega(z, x + y) = \omega(zx) + \omega(zy) = Z X + Z Y.$$

Es besitzt also das innere Punktprodukt dieselben Eigenschaften wie ein gewöhnliches Produkt.

11. Es ist demnach einerseits

$$\begin{aligned} X Y &\equiv (x_1 R_1 + x_2 R_2 + x_3 R_3)\ (y_1 R_1 + y_2 R_2 + y_3 R_3) \\ &= x_1 y_1 R_1 R_1 + x_2 y_2 R_2 R_2 + x_3 y_3 R_3 R_3 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) R_1 R_2 + \\ &\quad (x_2 y_3 + x_3 y_2) R_2 R_3 + (x_3 y_1 + x_1 y_3) R_3 R_1, \end{aligned}$$

andererseits ist nach der Definition in § 10:

$$\begin{aligned} X Y \equiv \omega(xy) = {} & \omega_{11} x_1 y_1 + \omega_{22} x_2 y_2 + \omega_{33} x_3 y_3 + \omega_{12}(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ & + \omega_{23}(x_2 y_3 + x_3 y_2) + \omega_{31}(x_3 y_1 + x_1 y_3). \end{aligned}$$

Hieraus schliessen wir, dass

$$R_1 R_1 = \omega_{11}\,, \quad R_2 R_2 = \omega_{22}\,, \quad R_3 R_3 = \omega_{33}\,,$$
$$R_1 R_2 = \omega_{12}\,, \quad R_2 R_3 = \omega_{23}\,, \quad R_3 R_1 = \omega_{31}\,.$$

12. Wie lässt sich die Gerade symbolisch darstellen? Sind u_i ihre Koordinaten und y_i diejenigen ihres absoluten Pols, so ist ihre Gleichung einerseits:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

und andererseits als absolute Polare des Punktes y_i:

$$x_1 \omega'(y_1) + x_2 \omega'(y_2) + x_3 \omega'(y_3) = 0.$$

Folglich verhält sich

$$u_1 : u_2 : u_3 = \omega'(y_1) : \omega'(y_2) : \omega'(y_3)$$

oder umgekehrt:

$$y_1 : y_2 : y_3 = \Omega'(u_1) : \Omega'(u_2) : \Omega'(u_3).$$

Jetzt nehmen wir 1 als Proportionalitätsfaktor und definieren die Gerade u_i durch ihren absoluten Pol

$$\Omega'(u_1)\, R_1 + \Omega'(u_2)\, R_2 + \Omega'(u_3)\, R_3$$

oder $(\Omega_{11} R_1 + \Omega_{12} R_2 + \Omega_{13} R_3)\, u_1 + (\Omega_{12} R_1 + \Omega_{22} R_2 + \Omega_{23} R_3)\, u_2 +$
$(\Omega_{13} R_1 + \Omega_{23} R_2 + \Omega_{33} R_3)\, u_3.$

13. Diese Klammerausdrücke setzen wir:

$$\begin{aligned} \Omega_{11} R_1 + \Omega_{12} R_2 + \Omega_{13} R_3 &\equiv L_1 \\ \Omega_{12} R_1 + \Omega_{22} R_2 + \Omega_{23} R_3 &\equiv L_2 \\ \Omega_{13} R_1 + \Omega_{23} R_2 + \Omega_{33} R_3 &\equiv L_3 \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen mit ω_{11}, ω_{12}, ω_{13}, ... und mit Beachtung, dass $\Omega = 1$ ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} R_1 &\equiv \omega_{11} L_1 + \omega_{12} L_2 + \omega_{13} L_3 \\ R_2 &\equiv \omega_{12} L_1 + \omega_{22} L_2 + \omega_{23} L_3 \\ R_3 &\equiv \omega_{13} L_1 + \omega_{23} L_2 + \omega_{33} L_3 \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

Wir bekommen demnach als Repräsentant der Geraden u_i den Punkt

$$u_1 L_1 + u_2 L_2 + u_3 L_3.$$

14. Jetzt finden wir leicht die inneren Produkte:

$$L_1 L_1 = \Omega_{11}\,, \quad L_2 L_2 = \Omega_{22}\,, \quad L_3 L_3 = \Omega_{33}$$
$$L_1 L_2 = \Omega_{12}\,, \quad L_2 L_3 = \Omega_{23}\,, \quad L_3 L_1 = \Omega_{31}$$

Ferner
$$R_1 L_1 = 1\,, \quad R_2 L_2 = 1\,, \quad R_3 L_3 = 1$$
$$R_1 L_2 = 0\,, \quad R_2 L_3 = 0\,, \quad R_3 L_1 = 0$$
$$R_1 L_3 = 0\,, \quad R_2 L_1 = 0\,, \quad R_3 L_2 = 0.$$

15. Das „äussere Produkt“ zweier Punkte X und Y definieren wir durch folgende Gleichung:

$$\mathfrak{V}\,X\,Y \equiv \begin{vmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

oder wenn wir diese Determinante mit der Diskriminante $|\omega_{11}\,\omega_{22}\,\omega_{33}| = 1$ multiplizieren und dabei die Gleichungen (II) berücksichtigen:

$$\mathfrak{V}\,X\,Y \equiv \begin{vmatrix} R_1 & R_2 & R_3 \\ \omega'(x_1) & \omega'(x_2) & \omega'(x_3) \\ \omega'(y_1) & \omega'(y_2) & \omega'(y_3) \end{vmatrix}$$

Aus dieser Definition folgt unmittelbar, dass $\mathfrak{V}\,X\,X = 0$ ist.

16. Aus der getroffenen Definition finden wir durch Spezialisierung, indem wir R_1 (1, 0, 0) und R_2 (0, 1, 0) an Stelle von X und Y substituieren, den Wert der folgenden äusseren Produkte:

$$\mathfrak{V}\,R_1\,R_2 \equiv \begin{vmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = L_3$$

ebenso $\mathfrak{V}\,R_2\,R_3 = L_1$, $\mathfrak{V}\,R_3\,R_1 = L_2$.

17. Ferner findet man aus der obigen Definition durch Substitution von $\Omega_{11}R_1 + \Omega_{12}R_2 + \Omega_{13}R_3$ für L_1, u. s. w.:

$$\mathfrak{V}\,L_2\,L_3 \equiv$$

$$\begin{matrix} \Omega_{11}R_1 + \Omega_{12}R_2 + \Omega_{13}R_3 \\ \Omega_{12} \\ \Omega_{13} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \Omega_{12}R_1 + \Omega_{22}R_2 + \Omega_{23}R_3 \\ \Omega_{22} \\ \Omega_{23} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \Omega_{13}R_1 + \Omega_{23}R_2 + \Omega_{33}R_3 \\ \Omega_{23} \\ \Omega_{33} \end{matrix}$$

$$= R_1,$$

ebenso $\mathfrak{V}\,L_3\,L_1 = R_2$, $\mathfrak{V}\,L_1\,L_2 = R_3$.

18. Endlich folgt noch aus der Definition in § 15:

$$\mathfrak{V}\,XY = \begin{vmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \equiv - \begin{vmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \equiv -\mathfrak{V}\,Y\,X.$$

In ähnlicher Weise finden wir durch Zerlegung der Determinante, dass $\mathfrak{V}\,Z\,(X+Y) \equiv \mathfrak{V}\,Z\,X + \mathfrak{V}\,Z\,Y$.

Das äussere Punktprodukt besitzt demnach alle Eigenschaften eines gewöhnlichen Produkts mit Ausnahme der kommutativen.

19. Welches ist die geometrische Bedeutung des äusseren Punktproduktes $\mathfrak{V}\,X\,Y$? Es ist der absolute Pol der durch die Punkte X und Y bestimmten Geraden. Denn die Koordinaten der absoluten Polare von X sind: $\omega'(x_1)$, $\omega'(x_2)$, $\omega'(x_3)$, und von y: $\omega'(y_i)$.

Der Schnittpunkt der beiden Polaren ist aber nach § 6 der absolute Pol der Geraden (X Y), und dieser ist:

$$\begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \\ \omega'(x_1) & \omega'(x_2) & \omega'(x_3) \\ \omega'(y_1) & \omega'(y_2) & \omega'(y_3) \end{array}$$

Dies ist aber gleich $\mathfrak{V}\,X\,Y$. (§ 15).

20. Das innere Produkt $Z\,\mathfrak{V}\,X\,Y$ ist, wenn wir die Koordinaten des Punktes $\mathfrak{V}\,X\,Y$ mit t_i bezeichnen:

$$Z\,\mathfrak{V}\,X\,Y = t_1\,\omega'(z_1) + t_2\,\omega'(z_2) + t_3\,\omega'(z_3).$$

Nun aber sind die Koordinaten des Punktes $\mathfrak{V}\,X\,Y$ (§ 15):

$$\omega'(x_2)\,\omega'(y_3) - \omega'(x_3)\,\omega'(y_2), \qquad \omega'(x_3)\,\omega'(y_1) - \omega'(x_1)\,\omega'(y_3),$$
$$\omega'(x_1)\,\omega'(y_2) - \omega'(x_2)\,\omega'(y_1).$$

Daher wird

$$Z\,\mathfrak{V}\,X\,Y = \begin{vmatrix} \omega'(z_1) & \omega'(z_2) & \omega'(z_3) \\ \omega'(x_1) & \omega'(x_2) & \omega'(x_3) \\ \omega'(y_1) & \omega'(y_2) & \omega'(y_3) \end{vmatrix}$$

oder auch, wenn wir mit $|\Omega_{ik}| = 1$ multiplizieren:

$$Z\,\mathfrak{V}\,X\,Y = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Dies zeigt unmittelbar, dass

$$Z\,\mathfrak{V}\,X\,Y = Y\,\mathfrak{V}\,Z\,X = X\,\mathfrak{V}\,Y\,Z$$

und dass ein solches inneres Produkt Null wird, sobald zwei der darin auftretenden Punkte zusammenfallen; denn dann werden zwei Zeilen der Determinante einander gleich.

21. Das äussere Produkt $\mathfrak{V}\,Z\,\mathfrak{V}\,X\,Y$, oder in anderer Schreibweise $[Z\,X\,Y]$, wird gleich

$$[Z\,X\,Y] = \begin{vmatrix} R_1 & R_2 & R_3 \\ \omega'(z_1) & \omega'(z_2) & \omega'(z_3) \\ \omega'(t_1) & \omega'(t_2) & \omega'(t_3) \end{vmatrix}$$

worin $t_i \equiv \omega'(x_k)\,\omega'(y_l) - \omega'(x_l)\,\omega'(y_k)$ bedeutet.

Nun aber ist

$$\omega'(t_1) = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega'(x_1) & \omega'(x_2) & \omega'(x_3) \\ \omega'(y_1) & \omega'(y_2) & \omega'(y_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = x_2\,y_3 - x_3\,y_2.$$

$$\omega'(t_2) = x_3 y_1 - x_1 y_3, \qquad \omega'(t_3) = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Folglich ist

$$[ZXY] = \begin{vmatrix} R_1 & R_2 & R_3 \\ \omega'(z_1) & \omega'(z_2) & \omega'(z_3) \\ x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{vmatrix}$$

$$= x_1 R_1 [y_2 \omega'(z_2) + y_3 \omega'(z_3)] - y_1 R_1 [x_2 \omega'(z_2) + x_3 \omega'(z_3)]$$
$$+ x_2 R_2 [y_3 \omega'(z_3) + y_1 \omega'(z_1)] - y_2 R_2 [x_3 \omega'(z_3) + x_1 \omega'(z_1)]$$
$$+ x_3 R_3 [y_1 \omega'(z_1) + y_2 \omega'(z_2)] - y_3 R_3 [x_1 \omega'(z_1) + x_2 \omega'(z_2)]$$
$$= (x_1 R_1 + x_2 R_2 + x_3 R_3)[y_1 \omega'(z_1) + y_2 \omega'(z_2) + y_3 \omega'(z_3)]$$
$$- (y_1 R_1 + y_2 R_2 + y_3 R_3)[x_1 \omega'(z_1) + x_2 \omega'(z_2) + x_3 \omega'(z_3)]$$
$$= X\omega(yz) - Y\omega(xz) = X.YZ - Y.XZ.$$

22. Endlich wird das innere Produkt der Punkte $\mathfrak{V}XY$ und $\mathfrak{V}ZT$

$$\mathfrak{V}XY\mathfrak{V}ZT = Z[TXY] = XY.YT - XT.YZ$$

nach §§ 20 und 21.

Und ihr äusseres Produkt [1])

$$\mathfrak{V}\mathfrak{V}XY\mathfrak{V}ZT \equiv [XY\,ZT] = Z.T\mathfrak{V}XY - T.Z\mathfrak{V}XY.$$

23. Machen wir einige geometrische Anwendungen, welche die Bedeutung der eingeführten Symbole noch deutlicher hervortreten lassen.

Jst L konstant, so liegen alle Punkte R, welche der Gleichung

$$LR = 0$$

genügen, auf der Geraden L, d. h. auf der Geraden, von welcher der Punkt L der absolute Pol ist.

Jst R konstant, so gehen alle Geraden L, welche der Gleichung

$$RL = 0$$

genügen, durch den Punkt R.

24. $\mathfrak{V}R'R''$ ist das Symbol der durch R′ und R″ gehenden Geraden.

$\mathfrak{V}L'L''$ ist das Symbol des Schnittpunktes der Geraden L′ und L″.

25. Liegen die Punkte R′ und R″ auf einer Geraden L, so liegt auch der Punkt $R' + \lambda R''$ auf ihr.

Gehen die Geraden L′ und L″ durch einen Punkt R, so geht auch die Gerade $L' + \lambda L''$ durch ihn.

[1]) Wir haben $\mathfrak{V}$ als Operationszeichen der äusseren Multiplikation gewählt, um aber dessen Häufung zu vermeiden, ersetzen wir es bisweilen durch eine eckige Klammer [. . .]. Dabei werden wir die innern Klammern oder $\mathfrak{V}$ Zeichen bei denjenigen äussern Produkten weglassen, bei denen die einzelnen Faktoren selber äussere Produkte sind. Demnach

$$\mathfrak{V}\mathfrak{V}XY\mathfrak{V}ZT \equiv [[XY][ZT]] \equiv [XY\,ZT].$$

Denn es ist (§ 23)

$$L R' = 0 \text{ und } L R'' = 0,$$

folglich auch

$$L(R' + \lambda R'') = 0.$$

26. Jst L eine gegebene Gerade und R ein gegebener Punkt, so bedeutet ihr äusseres Produkt $V L R$ einen neuen Punkt, der auf der Geraden L liegt und mit R harmonisch konjugiert ist in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt.

27. Sind R′ und R″ zwei Punkte und ist ihr inneres Produkt

$$R' R'' = 0,$$

so bedeutet dies, dass der eine Punkt auf der absoluten Polare des andern liegt; sie sind also harmonisch konjugiert in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt.

28. Drei Punkte R, R′, R″ liegen auf derselben Geraden, wenn das innere Produkt ihrer Symbole

$$R V R' R'' = 0. \quad (\S\ 23).$$

Denn es ist (§ 23)

$$R L' = 0 \text{ und } R L'' = 0,$$

folglich auch

$$R(L' + \lambda L'') = 0.$$

Jst R ein gegebener Punkt und L eine gegebene Gerade, so bedeutet ihr äusseres Produkt $V R L$ eine neue Gerade, die durch den Punkt R geht und mit L harmonisch konjugiert ist in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt.

Sind L′ und L″ zwei Gerade und ist ihr inneres Produkt

$$L' L'' = 0,$$

so bedeutet dies, dass die eine Gerade durch den absoluten Pol der andern geht; sie sind also harmonisch konjugiert in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt.

Drei Gerade L, L′, L″ schneiden sich in demselben Punkte, wenn das innere Produkt ihrer Symbole

$$L V L' L'' = 0. \quad (\S\ 23).$$

Verallgemeinerung von Sätzen aus der elliptisch-hyperbolischen Geometrie.

Zuerst behandeln wir eine Anzahl Sätze aus der elliptisch-hyperbolischen Geometrie, der als absolutes Gebilde der absolute Kegelschnitt zu Grunde liegt. Denselben haben wir in der Theorie der Punktsymbole bereits definiert durch die Gleichungen

$$\omega(xx) = 0 \quad \text{und} \quad \Omega(uu) = 0$$

als absoluten Ordnungs- und Klassenkegelschnitt.

29. **„Orthozentrum“.**[1]) Zieht man durch die Ecken R_i des sphärischen Fundamentaldreiecks Gerade, Bestimmen wir auf den Dreieckseiten L_i die Punkte, welche mit den gegenüberliegenden Eckpunkten

[1]) Die metrischen Begriffe, welche durch die Verallgemeinerung einen neuen Sinn bekommen, bringen wir in Anführungszeichen „ . .“.

welche mit der gegenüberliegenden Dreieckseite L_i harmonisch konjugiert sind in Bezug auf $\Omega(uu) = 0$, so gehen diese Ecktransversalen, welche wir die „Höhenlinien" nennen wollen, durch einen Punkt, der entsprechend als „Höhenpunkt" zu bezeichnen ist.

Aus § 26 folgt unmittelbar, dass den „Höhenlinien" das Symbol zukommen muss:

$$h_i \equiv \mathsf{V} L_i R_i = [R_i R_k R_l] \quad (\S\,16).$$

Da das innere Produkt [1])

$$\mathsf{V} R_1 R_2 R_3 [R_2 R_3 R_1 \quad R_3 R_1 R_2] \equiv 0,$$

so gehen die Geraden h_i durch einen Punkt:

$$H \equiv \mathsf{V} h_k h_l \equiv \frac{R_1}{\Omega_{23}} + \frac{R_2}{\Omega_{31}} + \frac{R_3}{\Omega_{12}}$$

Die Koordinaten des „Orthozentrums" hängen offenbar nur von den Koeffizienten der Produkte $u_k u_l$ des absoluten Klassenkegelschnitts $\Omega(uu)$ ab. Ist $\Omega_{kl} = 0$, so wird der „Höhenpunkt" unbestimmt. Dieser Fall würde eintreten, wenn das Fundamentaldreieck in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt ein Polardreieck wäre.

R_i in Bezug auf $\omega(xx) = 0$ harmonisch konjugiert sind, so liegen diese drei Punkte auf einer Geraden.

Aus § 26 folgt unmittelbar, dass diesen harmonisch konjugierten Punkten das Symbol zukommen muss:

$$H_i' \equiv \mathsf{V} R_i L_i = [L_i L_k L_l] \quad (\S\,17).$$

Da das innere Produkt

$$\mathsf{V} L_1 L_2 L_3 [L_2 L_3 L_1 \quad L_3 L_1 L_2] \equiv 0,$$

so liegen die Punkte H_i' auf einer Geraden:

$$h \equiv \mathsf{V} H_k' H_l' \equiv \frac{L_1}{\omega_{23}} + \frac{L_2}{\omega_{31}} + \frac{L_3}{\omega_{12}}$$

Die Koordinaten dieser Geraden hängen offenbar nur von den Koeffizienten der Produkte $x_k x_l$ des absoluten Ordnungskegelschnittes $\omega(xx)$ ab. Ist $\omega_{kl} = 0$, so wird die Gerade h unbestimmt. Dieser Fall würde eintreten, wenn das Fundamentaldreiseit in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt ein Polardreiseit wäre.

Den Uebergang zur gewöhnlichen metrischen Geometrie gewinnen wir ganz einfach dadurch, dass wir die Symbole R_i und L_i als Vektoren

---

[1]) Für die Notation siehe Anmerkung 1 zu § 22. — Dass dieses innere Produkt identisch Null ist, ergibt sich durch Entwicklung der einzelnen Faktoren nach der Formel in § 20, wobei zu beachten ist, dass $R_i \mathsf{V} R_i R_k = 0$. Schreiben wir der Kürze wegen nur die Indizes der Symbole, so ist

$$\mathsf{V}\,1\,2\,3\,[2\,3\,1 \quad 3\,1\,2] \equiv (31.2 - 12.3)\,\mathsf{V}\,(12.3 - 23.1)\,(23.1 - 31.2)$$
$$31.12.23.1\,\mathsf{V}\,23 - 31.12.23.1\,\mathsf{V}\,23 \equiv 0.$$

interpretieren.[1]) Dann liefert das äussere Vektorprodukt $\mathfrak{V}\, h_k h_l$ direkt das wahre Orthozentrum:

$$H \equiv \operatorname{tg} A_1 R_1 + \operatorname{tg} A_2 R_2 + \operatorname{tg} A_3 R_3, \text{ und dual dazu}$$
$$h \equiv \operatorname{tg} a_1 L_1 + \operatorname{tg} a_2 L_2 + \operatorname{tg} a_3 L_3,$$

wo die A_i die Aussenwinkel und a_i die Seiten des sphärischen Dreiecks bedeuten.[2])

30. Durch Permutation finden wir aus dem Symbol $\mathfrak{V}\, L_i R_i$ der „Höhenlinien" noch zwei andere Tripel von Geraden, die mit den Dreieckseiten harmonisch konjugiert sind: $m_i \equiv \mathfrak{V}\, L_i R_k$ und $n_i \equiv \mathfrak{V}\, L_i R_l$. Sie bilden zwei Dreiseite, welche sich ausser in den Ecken R_i und den absoluten Polen L_i der Seiten des Grunddreiecks noch in drei weiteren Punkten Q_i schneiden. Das neue Dreieck Q_i ist perspektivisch zum Grunddreieck.

$$Q_i \equiv \left[L_k R_l \quad L_l R_k\right].$$

Da das innere Produkt[3])

$$\mathfrak{V}\, R_1 Q_1 \left[R_2 Q_2 \quad R_3 Q_3\right] = 0,$$

so gehen die Verbindungsgeraden $R_i Q_i$ der homologen Eckpunkte durch einen Punkt Q, das Perspektivitätszentrum:

Durch Permutation finden wir aus dem Symbol $\mathfrak{V}\, R_i L_i$ der harmonischen Punkte H'_i noch zwei andere Tripel harmonisch konjugierter Punkte:

$M_i \equiv \mathfrak{V}\, R_i L_k$ und $N_i \equiv \mathfrak{V}\, R_i L_l$. Sie bilden zwei Dreiecke, deren Ecken ausser durch die Seiten L_i und die absoluten Polaren der Ecken R_i noch durch drei weitere Gerade q_i verbunden sind. Das neue Dreiseit q_i ist perspektivisch zum Grunddreiseit.

$$q_i \equiv \left[R_k L_l \quad R_l L_k\right].$$

Da das innere Produkt

$$\mathfrak{V}\, L_1 q_1 \left[L_2 q_2 \quad L_3 q_3\right] = 0,$$

so liegen die Schnittpunkte $(L_i q_i)$ der homologen Seiten auf einer Geraden q, der Perspektivitätsachse:

---

[1]) Ein Punkt der Kugel wird durch den Vektor R bestimmt, der vom Zentrum der Kugel aus durch den Punkt gezogen wird. Und eine sphärische Gerade (grösster Kugelkreis) wird durch den Vektor L bestimmt, der vom Zentrum aus senkrecht zur Ebene dieses grössten Kugelkreises gezogen wird. Das äussere Vektorprodukt $\mathfrak{V}\, R_1 R_2$ bedeutet demnach die Verbindungsgerade der Punkte R_1 und R_2; und dual dazu stellt der neue Vektor $\mathfrak{V}\, L_1 L_2$ den Schnittpunkt von L_1 und L_2 dar. $\left[R_1 R_2 R_3\right]$ ist folglich ein neuer Vektor, welcher die Gerade charakterisiert, die senkrecht auf $\mathfrak{V}\, R_2 R_3$ steht und durch R_1 geht, also die erste Höhenlinie. Siehe M.-Fr. Daniels, Essai de géométrie sphérique, S. 13 ff.

[2]) Siehe M.-Fr. Daniels, Essai de géometrie sphér. S. 52.

[3]) Dieses innere Produkt lautet ausführlich geschrieben:

$$\mathfrak{V}\, R_1 \left[L_2 R_3 \quad L_3 R_2\right] \mathfrak{V} \mathfrak{V}\, R_2 \left[L_3 R_1 \quad L_1 R_3\right] \mathfrak{V}\, R_3 \left[L_1 R_2 \quad L_2 R_1\right] = 0.$$

$$Q \equiv [R_k Q_k \; R_l Q_l] =$$

$$\Omega_{11}\Omega_{23}R_1 + \Omega_{22}\Omega_{31}R_2 + \Omega_{33}\Omega_{12}R_3.$$

H und Q sind offenbar „Gegenpunkte" der quadratischen Transformation

$$x_i z_i = \Omega_{ii}.$$

Bezöge man die Koordinaten auf ein absolutes Polardreieck, so würde wieder $\Omega_{kl} = 0$ und m_k, n_l und L_i fielen zusammen, und die Perspektivität ginge im allgemeinen verloren. Gehen wir wieder zur gewöhnlichen sphärischen Geometrie über, indem wir die Symbole als Vektoren auffassen, so bilden die Geraden m_i und n_i auf den Seiten L_i Aufsatzdreiseite, deren Basiswinkel rechte sind.

31. **Vollständiges Viereck.** Sind in einem vollständigen Viereck zwei Paar Gegenseiten harmonisch konjugiert,[1]) so sind es auch die Seiten des dritten Paares.

Sind R, R_1, R_2, R_3 die Ecken des Vierecks, so folgt der Satz unmittelbar aus der Identität:

$$V R_2 R_3 V R_1 R + V R_3 R_1 V R_2 R + V R_1 R_2 V R_3 R \equiv 0.$$

Denn wird die Voraussetzung erfüllt, so werden die beiden ersten Glieder Null; dann ist aber vermöge der Identität auch das dritte Glied Null, d. h. dann sind auch die Seiten des dritten Paares harmonisch konjugiert.

$$q \equiv [L_k q_k \; L_l q_l] =$$

$$\omega_{11}\omega_{23}L_1 + \omega_{22}\omega_{31}L_2 + \omega_{33}\omega_{12}L_3.$$

h und q sind „Gegengeraden" der quadratischen Transformation

$$u_i v_i = \omega_{ii}.$$

Bezöge man die Koordinaten auf ein absolutes Polardreiseit, so würde wieder $\omega_{kl} = 0$ und M_k, M_l und R_i fielen zusammen, und die Perspektivität ginge im allgemeinen verloren. Gehen wir wieder zur gewöhnlichen sphärischen Geometrie über, indem wir die Symbole als Vektoren auffassen, so bilden die Punkte M_i und N_i mit den Eckpunkten R_i neue Dreiecke, deren Spitzen R_i von den beiden andern Ecken M_i und N_i um einen Bogen $\frac{\pi}{2}$ entfernt sind.

Vollständiges Vierseit. Sind in einem vollständigen Vierseit zwei Paar Gegenecken harmonisch konjugiert, so sind es auch die Ecken des dritten Paares.

Sind L, L_1, L_2, L_3 die Seiten des Vierseits, so folgt der Satz unmittelbar aus der Identität:

$$V L_2 L_3 V L_1 L + V L_3 L_1 V L_2 L + V L_1 L_2 V L_3 L \equiv 0.$$

Denn wird die Voraussetzung erfüllt, so werden die beiden ersten Glieder Null; dann ist aber vermöge der Identität auch das dritte Glied Null, d. h. dann sind auch die Ecken des dritten Paares harmonisch konjugiert.

[1]) in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt; dies ist immer vorausgesetzt, wenn nichts anderes gesagt wird.

Werden diese Identitäten vektoriell interpretiert, so ergeben sich ohne weiteres die entsprechenden Sätze der gewöhnlichen sphärischen (oder ebenen) Geometrie.

32. Die „Orthozentren" der vier von den Seiten eines sphärischen (oder ebenen) Vierseits gebildeten Dreiseite liegen in einer Geraden.

Von den vier Geraden, welche das Vierseit bilden, wählen wir drei als Seiten des Grunddreiseits. Wir haben demnach L_1, L_2, L_3 und

$$L \equiv u_1 L_1 + u_2 L_2 + u_3 L_3$$

als Seiten und R_1, R_2, R_3, $\bigvee L_i L$ als Eckpunkte des Vierseits; folglich als Dreiseite: $L_1L_2L_3$, L_2L_3L, L_3L_1L, L_1L_2L. Bezeichnen wir mit H den „Höhenpunkt" des ersten Dreiseits, mit H_i die entsprechenden „Höhenpunkte" der drei folgenden Dreiseite, so ist (§ 29)

$$H \equiv \left[L_k R_k \quad L_l R_l\right]$$

$$H_i \equiv \left[L_k L_l L \quad L_l L_k L\right]$$

Nun ist einerseits $H \bigvee H_1 H_2 = 0$

und andererseits $H \bigvee H_2 H_3 = 0$.

Dies ist aber nur möglich, wenn alle vier „Höhenpunkte" derselben Geraden angehören.

33. Eine willkürliche Transversale L schneidet die Seiten des sphärischen (oder ebenen) Grunddreiseits in den Punkten M_i. Die durch diese Punkte zu den entsprechenden Seiten gezogenen harmonisch konjugierten Geraden n_i bilden ein neues Dreiseit, das zum Grunddreiseit perspektivisch ist.

Die Geraden h (§ 29) der vier von den Ecken eines vollständigen Vierecks gebildeten Dreiecke gehen durch einen Punkt.

Von den vier Eckpunkten wählen wir drei als Ecken des Grunddreiecks. Wir haben demnach R_1, R_2, R_3 und

$$R \equiv x_1 R_1 + x_2 R_2 + x_3 R_3$$

als Ecken und L_1, L_2, L_3, $\bigvee R_i R$ als Seiten des Vierecks; folglich als Dreiecke: $R_1R_2R_3$, R_2R_3R, R_3R_1R, R_1R_2R. Bezeichnen wir mit h die Gerade des ersten Dreiecks und mit h_i die entsprechenden Geraden der drei folgenden Dreiecke, so ist (§ 29)

$$h \equiv \left[R_k L_k \quad R_l L_l\right]$$

$$h_i \equiv \left[R_k R_l R \quad R_l R_k R\right]$$

Nun ist einerseits $h \bigvee h_1 h_2 = 0$

und anderseits $h \bigvee h_2 h_3 = 0$.

Dies ist aber nur möglich, wenn alle vier Geraden durch denselben Punkt gehen.

Ein willkürlicher Punkt R wird mit den Ecken des Grunddreiecks durch die Geraden m_i verbunden. Die mit den entsprechenden Eckpunkten harmonisch konjugierten Punkte Q_i dieser Scheitelgeraden bilden ein neues Dreieck, das zum Grunddreieck perspektivisch ist.

Ist

$$L \equiv u_1 L_1 + u_2 L_2 + u_3 L_3,$$

so sind die Punkte und Geraden

$$M_i \equiv V L_i L, \quad n_i \equiv [L_i L_i L],$$

und die Verbindungsgeraden homologer Eckpunkte:

$$\begin{aligned}(R_1 N_1) &\equiv [R_1 n_2 n_3] \\ &= R_1 n_3 . n_2 - R_1 n_2 . n_3 \\ &= - \Omega_{33} n_2 + \Omega_{22} n_3 \\ (R_2 N_2) &= - \Omega_{11} n_3 + \Omega_{33} n_1 \\ (R_3 N_3) &= - \Omega_{22} n_1 + \Omega_{11} n_2.\end{aligned}$$

Die Summe dieser drei Symbole wird Null[1]), wenn das erste mit Ω_{11}, das zweite mit Ω_{22} und das dritte mit Ω_{33} multipliziert wird. Die Geraden $(R_i N_i)$ gehen daher durch einen Punkt, durch das Kollineationszentrum.

34. **„Orthologische Dreiecke."** Sind zwei Dreiecke R_i und R_i' gegeben, und gehen die zu den entsprechenden Seiten des zweiten Dreiecks harmonisch konjugierten Ecktransversalen des ersten Dreiecks durch einen Punkt, so schneiden sich die Ecktransversalen des zweiten Dreiecks, die mit den entsprechenden Seiten des ersten harmonisch konjugiert sind, ebenfalls in einem Punkte.

Ist

$$R \equiv x_1 R_1 + x_2 R_2 + x_3 R_3,$$

so sind die Geraden und Punkte

$$m_i \equiv V R_i R, \quad Q_i \equiv [R_i R_i R],$$

und die Schnittpunkte homologer Seiten:

$$\begin{aligned}(L_1 q_1) &\equiv [L_1 Q_2 Q_3] \\ &= L_1 Q_3 . Q_2 - L_1 Q_2 . Q_3 \\ &= - \omega_{33} Q_2 + \omega_{22} Q_3 \\ (L_2 q_2) &= - \omega_{11} Q_3 + \omega_{33} Q_1 \\ (L_3 q_3) &= - \omega_{22} Q_1 + \omega_{11} Q_2.\end{aligned}$$

Die Summe dieser drei Symbole wird Null, wenn das erste mit ω_{11}, das zweite mit ω_{22} und das dritte mit ω_{33} multipliziert wird. Die Schnittpunkte $(L_i q_i)$ liegen daher auf einer Geraden, auf der Kollineationsachse.

Sind zwei Dreiseite L_i und L_i' gegeben, und liegen die mit den entsprechenden Eckpunkten des zweiten Dreiseits harmonisch konjugierten Punkte der Seiten des ersten auf einer Geraden, so gehören die auf den Seiten des zweiten Dreiseits befindlichen und mit den entsprechenden Eckpunkten des ersten harmonisch konjugierten Punkte ebenfalls einer Geraden an.

[1]) Wenn sich drei Zahlen k_i finden lassen, durch welche $k_1 R + k_2 R' + k_3 R'' = 0$ wird, so liegen die drei Punkte R, R', R'' auf einer Geraden. Denn schreiben wir $k_1 R + k_2 R' = - k_3 R''$, so sehen wir hieraus unmittelbar (auf Grund von § 25), dass der dritte Punkt auf der Verbindungsgeraden der beiden ersten liegt.

Die konjugierten Geraden sind:

$$p_i \equiv \bigvee R_i L_i' \text{ und } p_i' \equiv \bigvee R_i' L_i.$$

Nun besteht auf jeden Fall folgende Identität:

$$\frac{\bigvee R_1 L_1' \,[R_2L_2' \;\; R_3L_3']}{R_1'L_1'} + \frac{\bigvee R_1' L_1 \,[R_2'L_2 \;\; R_3'L_3]}{R_1 L_1} \equiv 0$$

Gehen die p_i durch einen Punkt, so wird der Zähler des ersten Gliedes Null. Daher ist dann vermöge der Identität das zweite Glied Null, d. h. dann gehen auch die p_i' durch einen Punkt.

35. Schneiden die Geraden, welche durch die Eckpunkte R_i gehen und mit den Seiten L_i' eines andern Dreiecks harmonisch konjugiert sind, die Seiten L_i in drei Punkten einer Geraden, so liegen auch die drei Schnittpunkte, welche die durch die Ecken R_i' gehenden und mit den Seiten L_i harmonisch konjugierten Geraden auf L_i' liefern, in einer Geraden.

Sind $\bigvee L_i' R_i$ und $\bigvee L_i R_i'$ die konjugierten Geraden, so sind

$$[L_i L_i' R_i] \text{ und } [L_i' L_i R_i']$$

deren Schnittpunkte mit den entsprechenden Dreieckseiten. Nun besteht folgende Identität:

$$\frac{\bigvee L_1 L_1' R_1 \,[L_2 L_2' R_2 \;\; L_3 L_3' R_3]}{R_1 \bigvee R_2 R_3} - \frac{\bigvee L_1' L_1 R_1' \,[L_2' L_2 R_2' \;\; L_3' L_3 R_3']}{R_1' \bigvee R_2' R_3'} \equiv 0$$

Die konjugierten Punkte sind:

$$P_i \equiv \bigvee L_i R_i' \text{ und } P_i' \equiv \bigvee L_i' R_i.$$

Nun besteht auf jeden Fall folgende Identität:

$$\frac{\bigvee L_1 R_1' \,[L_2R_2' \;\; L_3R_3']}{L_1' R_1'} + \frac{\bigvee L_1' R_1 \,[L_2'R_2 \;\; L_3'R_3]}{L_1 R_1} \equiv 0$$

Sind die P_i drei Punkte einer Geraden, so wird der Zähler des ersten Gliedes Null. Daher ist dann vermöge der Identität das zweite Glied Null, d. h. dann sind auch die P_i' drei Punkte einer Geraden.

Werden die Punkte, welche auf den Seiten L_i liegen und die mit Ecken R_i' eines andern Dreiecks harmonisch konjugiert sind, mit den Ecken R_i durch drei in einem Punkt sich schneidende Gerade verbunden, so gehen auch die drei Geraden, welche die den Seiten L_i' angehörenden und mit R_i harmonisch konjugierten Punkte mit den Ecken R_i' verbinden, durch einen Punkt.

Sind $\bigvee R_i' L_i$ und $\bigvee R_i L_i'$ die konjugierten Punkte, so sind

$$[R_i R'_i L_i] \text{ und } [R_i' R_i L_i']$$

deren Verbindungsgeraden mit den entsprechenden Eckpunkten. Nun besteht folgende Identität:

$$\frac{\bigvee R_1 R_1' L_1 \,[R_2R_2'L_2 \;\; R_3R_3'L_3]}{L_1 \bigvee L_2 L_3} - \frac{\bigvee R_1' R_1 L'_1 \,[R_2' R_2 L_2' \;\; R_3' R_3 L_3']}{L_1' \bigvee L_2' L_3'} \equiv 0$$

Liegen die drei Schnittpunkte $[L_i L_i' R_i]$ in einer Geraden, so wird der erste Zähler Null; infolge der Identität wird dies dann aber auch der zweite Ausdruck, d. h. dann liegen auch die drei andern Schnittpunkte in einer Geraden.

Gehen die drei Verbindungsgeraden $[R_i R_i' L_i]$ durch einen Punkt, so wird der erste Zähler Null; infolge der Identität wird dies dann aber auch der zweite Ausdruck, d. h. dann gehen auch die drei andern Verbindungsgeraden durch einen Punkt.

36. Schneiden sich nicht nur die mit L_i harmonisch konjugierten und durch R_i' gehenden Geraden in einem Punkt, sondern auch die Geraden, welche mit $L_2 L_3 L_1$ harmonisch konjugiert sind und durch R_i' gehen, so nennen wir die Dreiecke R_i und R_i' „*doppelt*"- oder „*diorthologisch*". Für diese bestehen folgende Identitäten:

$$\begin{aligned} &\mathsf{V} R_1 L_1' \,[R_2 L_2' \quad R_3 L_3'] \\ +\ &\mathsf{V} R_1 L_2' \,[R_2 L_3' \quad R_3 L_1'] \\ +\ &\mathsf{V} R_1 L_3' \,[R_2 L_1' \quad R_3 L_2'] \equiv 0 \end{aligned}$$

In Worten: Gehen die harmonisch konjugierten Geraden $\mathsf{V} R_i L_i'$ durch einen Punkt und ebenso die harmonisch konjugierten Geraden $\mathsf{V} R_i L_k'$, so ist dies auch für die harmonisch konjugierten Geraden $\mathsf{V} R_i L_i'$ der Fall.

Ferner

$$\begin{aligned} &\mathsf{V} R_1 L_1' \,[R_2 L_3' \quad R_3 L_2'] \\ +\ &\mathsf{V} R_2 L_2' \,[R_3 L_1' \quad R_1 L_3'] \\ +\ &\mathsf{V} R_3 L_3' \,[R_1 L_2' \quad R_2 L_1'] \equiv 0. \end{aligned}$$

In Worten: Gehen die harmonisch konjugierten Geraden

$\mathsf{V} R_1 L_1'$, $\mathsf{V} R_2 L_3'$, $\mathsf{V} R_3 L_2'$

durch einen Punkt und ebenso die Geraden

$\mathsf{V} R_2 L_2'$, $\mathsf{V} R_3 L_1'$, $\mathsf{V} R_1 L_3'$,

so schneiden sich auch die harmonisch konjugierten Geraden

$\mathsf{V} R_3 L_3'$, $\mathsf{V} R_1 L_2'$, $\mathsf{V} R_2 L_1'$

in einem Punkt.

$$\begin{aligned} &\mathsf{V} L_1 R_1' \,[L_2 R_2' \quad L_3 R_3'] \\ +\ &\mathsf{V} L_1 R_2' \,[L_2 R_3' \quad L_3 R_1'] \\ +\ &\mathsf{V} L_1 R_3' \,[L_2 R_1' \quad L_3 R_2'] \equiv 0. \end{aligned}$$

In Worten: Liegen die harmonisch konjugierten Punkte $\mathsf{V} L_i R_i'$ in einer Geraden und ebenso die harmonisch konjugierten Punkte $\mathsf{V} L_i R_k'$, so ist dies auch für die harmonisch konjugierten Punkte $\mathsf{V} L_i R_i'$ der Fall.

Ferner

$$\begin{aligned} &\mathsf{V} L_1 R_1' \,[L_2 R_3' \quad L_3 R_2'] \\ +\ &\mathsf{V} L_2 R_2' \,[L_3 R_1' \quad L_1 R_3'] \\ +\ &\mathsf{V} L_3 R_3' \,[L_1 R_2' \quad L_2 R_1'] \equiv 0. \end{aligned}$$

In Worten: Liegen die harmonisch konjugierten Punkte

$\mathsf{V} L_1 R_1'$, $\mathsf{V} L_2 R_3'$, $\mathsf{V} L_3 R_2'$

auf einer Geraden und ebenso die Punkte

$\mathsf{V} L_2 R_2'$, $\mathsf{V} L_3 R_1'$, $\mathsf{V} L_1 R_3'$,

so gehören auch die harmonisch konjugierten Punkte

$\mathsf{V} L_3 R_3'$, $\mathsf{V} L_1 R_2'$, $\mathsf{V} L_2 R_1'$

einer Geraden an.

37. **„Lotpunkt" des Dreiecks.**[1]) Lassen wir eines der beiden orthologischen Dreiecke, etwa R_i', in eine Gerade, resp. dual die Seiten L_i' in einen Punkt ausarten, so werden wir auf den erweiterten Satz von Cwojdzinski geführt:

Zieht man zu einer beliebig gewählten Geraden L die harmonisch konjugierten Ecktransversalen des Grunddreiecks R_i, so schneiden sich die durch die Fusspunkte der letzteren auf L gehenden zu den entsprechenden Dreieckseiten L_i harmonisch konjugierten Geraden in einem Punkte, den wir den „Lotpunkt" des Dreiecks in Bezug auf eine Gerade nennen können.

Dass die zu L_i harmonisch konjugierten Geraden $V_iL_i[LR_iL]$ durch einen Punkt gehen, folgt aus der Identität:

$$VL_1[LR_1L] + VL_2[LR_2L] + VL_3[LR_3L] \equiv 0.$$

Wird für L eine der Dreieckseiten gewählt, so geht die Identität über in

$$VR_1L_1 + VR_2L_2 + VR_3L_3 \equiv 0$$

und der „Lotpunkt" ist der „Höhenpunkt" H (§ 29).

38. Den vorstehenden Satz können wir noch allgemeiner fassen:

Nimmt man in den Punktreihen, welche auf den durch die Ecken R_i gehenden und zu einer willkürlich gewählten Geraden L harmonisch

Bestimmt man auf den Seiten L_i des Grunddreiseits die zu einem beliebig gewählten Punkt R harmonisch konjugierten Punkte, so gehören die auf den Verbindungsgeraden der letzteren mit R liegenden und zu den entsprechenden Ecken R_i harmonisch konjugierten Punkte einer Geraden an.

Dass die zu R_i harmonisch konjugierten Punkte $VR_i[RL_iR]$ einer Geraden angehören, folgt aus der Identität:

$$VR_1[RL_1R] + VR_2[RL_2R] + VR_3[RL_3R] \equiv 0.$$

Wird für R einer der Eckpunkte des Grunddreiseits gewählt, so geht die Identität über in

$$VL_1R_1 + VL_2R_2 + VL_3R_3 \equiv 0$$

und die Verbindungsgerade ist die aus § 29 bekannte Gerade h.

Den vorstehenden Satz können wir noch allgemeiner fassen:

Nimmt man in den Geradenbüscheln, welche die auf den Seiten L_i gelegenen und zu einem willkürlich gewählten Punkte R harmonisch

[1]) Ueber den Lotpunkt hat K. Cwojdzinski den Satz gefunden: „Fällt man von den Ecken eines Dreiecks auf eine Gerade Lote, so schneiden sich die von ihren Fusspunkten auf die zugehörigen Seiten des Dreiecks gefällten Lote in einem Punkte", welchen sein Entdecker „Lotpunkt eines Dreiecks in Bezug auf ine Gerade" nennt. Siehe Archiv der Mathem. und Physik, III, 1, S. 175 ff.

konjugierten Geraden liegen, diejenigen Punkte, denen derselbe Parameter λ entspricht (auf Eckpunkt und Fusspunkt von L als Fundamentalpunkte bezogen), so schneiden sich die durch diese Punkte gehenden zu den entsprechenden Dreieckseiten harmonisch konjugierten Geraden in einem Punkt.

Die Fusspunkte der in Frage kommenden Ecktransversalen auf L sind:

$$[L\,R_i\,L]$$

und ein willkürlicher Punkt auf diesen Ecktransversalen:

$$[L\,R_i\,L] - \lambda\,R_i.$$

Nun aber besteht folgende Identität:

$$\begin{aligned} &V L_1\,([L\,R_1\,L] - \lambda\,R_1) \\ &+ V L_2\,([L\,R_2\,L] - \lambda\,R_2) \\ &+ V L_3\,([L\,R_3\,L] - \lambda\,R_3) \\ &\equiv \Sigma V L_i [L R_i L] - \lambda \Sigma V L_i R_i \equiv 0. \end{aligned}$$

Diese Identität besteht, was auch λ sein mag. Damit ist das Theorem bewiesen.

Für $\lambda = 0$ geht dasselbe in den Satz des § 37 über; für $\lambda = \infty$ liefert es als Schnittpunkt den „Höhenpunkt".

39. **„Bogenhalbierungspunkte".**

In diesem Paragraph übertragen wir die projektive Definition der Streckenhalbierungspunkte oder Streckenmitten auf die Kugel. Wir bezeichnen als „Halbierungspunkte" konjugierten Punkte als Träger haben, diejenigen Geraden, denen derselbe Parameter λ entspricht (auf Dreieckseite und Verbindungsgerade des Trägers mit R als Fundamentalstrahlen bezogen), so liegen die auf diesen Geraden befindlichen und zu den entsprechenden Ecken des Grunddreiecks harmonisch konjugierten Punkte in einer Geraden.

Die Verbindungsgeraden der Träger der Strahlenbüschel mit R sind:

$$[R\,L_i\,R]$$

und die Symbole der Büschel:

$$[R\,L_i\,R] - \lambda\,L_i.$$

Nun aber besteht folgende Identität:

$$\begin{aligned} &V R_1\,([R\,L_1\,R] - \lambda\,L_1) \\ &+ V R_2\,([R\,L_2\,R] - \lambda\,L_2) \\ &+ V R_3\,([R\,L_3\,R] - \lambda\,L_3) \\ &\equiv \Sigma V R_i [R L_i R] - \lambda \Sigma V R_i L_i \equiv 0. \end{aligned}$$

Diese Identität besteht, was auch λ sein mag. Damit ist das Theorem bewiesen.

Für $\lambda = 0$ geht es in den Satz des § 37 über; für $\lambda = \infty$ liefert es als Verbindungsgerade die Gerade h von § 29.

„Winkelhalbierende".

In diesem Paragraph übertragen wir die projektive Definition der Winkelhalbierungsgeraden auf die Kugel. Wir bezeichnen als „Winkelhalbierende" diejenigen Geraden,

oder „Mitten“ eines Bogens diejenigen Punkte desselben, welche sowohl in Bezug auf seine Endpunkte als auch in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt harmonisch konjugiert sind.

Es seien die Endpunkte eines Bogens gegeben durch die Symbole:

$$M \equiv x_1 R_1 + x_2 R_2 + x_3 R_3,$$
$$M' \equiv x_1' R_1 + x_2' R_2 + x_3' R_3.$$

Nun sind die Symbole der „Halbierungspunkte“:

$$\frac{M}{x_4} \pm \frac{M'}{x_4'},$$
$$\text{wo} \quad x_4 \equiv \sqrt{\omega(xx)}$$
$$\text{und} \quad x_4' \equiv \sqrt{\omega(x'x')}.$$

Denn das D. V. dieser beiden Punkte in Bezug auf M und M′ ist in der Tat -1; und ebenso sind sie in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt konjugiert, da das innere Produkt ihrer Symbole Null ist.

Durch Spezialisierung finden wir jetzt unmittelbar die Symbole der „*Seitenmitten*“ des Grunddreiecks:

$$\frac{R_2}{\mu_2} \pm \frac{R_3}{\mu_3}, \quad \frac{R_3}{\mu_3} \pm \frac{R_1}{\mu_1}, \quad \frac{R_1}{\mu_1} \pm \frac{R_2}{\mu_2},$$

worin wir zur Abkürzung

$$\sqrt{\omega_{ii}} \equiv \mu_i$$

gesetzt haben.

Von diesen drei Punktpaaren liegen je drei Punkte in einer Geraden; so die drei äusseren „Mitten“, ferner je zwei innere und eine äussere „Mitte“. Durch innere Mul-

welche sowohl in Bezug auf die Schenkel des Winkels als auch in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt harmonisch konjugiert sind.

Es seien die Schenkel eines Winkels gegeben durch die Symbole:

$$L \equiv u_1 L_1 + u_2 L_2 + u_3 L_3,$$
$$L' \equiv u_1' L_1 + u_2' L_2 + u_3' L_3.$$

Nun sind die Symbole der „Winkelhalbierenden“:

$$\frac{L}{u_4} \pm \frac{L'}{u_4'},$$
$$\text{wo} \quad u_4 \equiv \sqrt{\Omega(uu)}$$
$$\text{und} \quad u_4' \equiv \sqrt{\Omega(u'u')}.$$

Denn das D. V. dieser beiden Geraden in Bezug auf L und L′ ist in der Tat -1; und ebenso sind sie in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt konjugiert, da das innere Produkt ihrer Symbole Null ist.

Durch Spezialisierung finden wir jetzt unmittelbar die Symbole der „*Winkelhalbierenden*“ des Grunddreiseits:

$$\frac{L_2}{\nu_2} \pm \frac{L_3}{\nu_3}, \quad \frac{L_3}{\nu_3} \pm \frac{L_1}{\nu_1}, \quad \frac{L_1}{\nu_1} \pm \frac{L_2}{\nu_2},$$

worin wir zur Abkürzung

$$\sqrt{\Omega_{ii}} \equiv \nu_i$$

gesetzt haben.

Von diesen drei Geradenpaaren schneiden sich je drei Gerade in einem Punkte; so die drei äusseren[1]) „Halbierenden“, ferner je zwei innere und eine äussere „Halbierende“.

[1]) Als Dreieckswinkel sind stets die Aussenwinkel zu verstehen.

tiplikation finden wir leicht die Symbole dieser Verbindungsgeraden:

$$\begin{aligned} i &\equiv \mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + \mu_3 L_3 \\ i_1 &\equiv -\mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + \mu_3 L_3 \\ i_2 &\equiv \mu_1 L_1 - \mu_2 L_2 + \mu_3 L_3 \\ i_3 &\equiv \mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 - \mu_3 L_3. \end{aligned}$$

Diese vier Geraden sind, wie man aus ihren Koordinaten sofort sieht, harmonisch assoziiert.

Im trilinearen Pol von i

$$\frac{R_1}{\mu_1} + \frac{R_2}{\mu_2} + \frac{R_3}{\mu_3}$$

schneiden sich die durch die innern „Seitenhalbierungspunkte" gehenden Ecktransversalen:

$$\mu_2 L_2 - \mu_3 L_3, \quad \mu_3 L_3 - \mu_1 L_1, \quad \mu_1 L_1 - \mu_2 L_2 .$$

40. **„Isotomverwandte" Geraden.** Fassen wir die Punktpaare, welche die Seiten des Grunddreiecks „halbieren", als Kegelschnitte auf, so finden wir in Bezug auf sie für jede Gerade einen Pol. Ist

$$p \equiv u_1 L_1 + u_2 L_2 + u_3 L_3$$

eine willkürliche sphärische Gerade, so sind ihre Pole in Bezug auf die „Seitenmittenpaare":

$$\frac{u_2}{\omega_{22}} R_2 - \frac{u_3}{\omega_{33}} R_3, \quad \frac{u_3}{\omega_{33}} R_3 - \frac{u_1}{\omega_{11}} R_1, \quad \frac{u_1}{\omega_{11}} R_1 - \frac{u_2}{\omega_{22}} R_2 .$$

Da die Summe dieser drei Symbole Null ist, so müssen die Punkte derselben Geraden angehören:

$$p' \equiv \frac{\omega_{11}}{u_1} L_1 + \frac{\omega_{22}}{u_2} L_2 + \frac{\omega_{33}}{u_3} L_3 .$$

Diese beiden Geraden nun, p und p', nennen wir *„isotomverwandt"* oder

Durch innere Multiplikation finden wir leicht die Symbole dieser Schnittpunkte:

$$\begin{aligned} J &\equiv \nu_1 R_1 + \nu_2 R_2 + \nu_3 R_3 \\ J_1 &\equiv -\nu_1 R_1 + \nu_2 R_2 + \nu_3 R_3 \\ J_2 &\equiv \nu_1 R_1 - \nu_2 R_2 + \nu_3 R_3 \\ J_3 &\equiv \nu_1 R_1 + \nu_2 R_2 - \nu_3 R . \end{aligned}$$

Diese vier Punkte sind, wie man aus ihren Koordinaten sofort sieht, harmonisch assoziiert.

Auf der trilinearen Polare von J

$$\frac{L_1}{\nu_1} + \frac{L_2}{\nu_2} + \frac{L_3}{\nu_3}$$

liegen die Fusspunkte der innern „Winkelhalbierenden":

$$\nu_2 R_2 - \nu_3 R_3, \quad \nu_3 R_3 - \nu_1 R_1, \quad \nu_1 R_1 - \nu_2 R_2 .$$

„Isogonalverwandte Punkte." Fassen wir die Geradenpaare, welche die Winkel des Grunddreiecks „halbieren", als Kegelschnitte auf, so finden wir in Bezug auf sie für jeden Punkt eine Polare. Ist

$$P \equiv x_1 R_1 + x_2 R_2 + x_3 R_3$$

ein willkürlicher Punkt der Kugel, so sind seine Polaren in Bezug auf die „Winkelhalbierendenpaare":

$$\frac{x_2}{\Omega_{22}} L_2 - \frac{x_3}{\Omega_{33}} L_3, \quad \frac{x_3}{\Omega_{33}} L_3 - \frac{x_1}{\Omega_{11}} L_1, \quad \frac{x_1}{\Omega_{11}} L_1 - \frac{x_2}{\Omega_{22}} L_2 .$$

Da die Summe dieser drei Symbole Null ist, so schneiden sich die Polaren in einem Punkte:

$$P' \equiv \frac{\Omega_{11}}{x_1} R_1 + \frac{\Omega_{22}}{x_2} R_2 + \frac{\Omega_{33}}{x_3} R_3$$

Diese beiden Punkte nun, P und P', nennen wir *„isogonalverwandt"*

„*Seitensymmetriegerade*“. Zwischen den Koordinaten u_i und v_i zweier solcher Geraden besteht demnach die Beziehung

$$u_i v_i = \omega_{ii}.$$

Die Fusspunkte zweier „Seitensymmetriegeraden“ liegen „symmetrisch“ zu den entsprechenden „Seitenmitten“. Denn die ersteren werden von den letzteren harmonisch getrennt und daher die Bogen $L_i(pp')$ von den „Seitenmitten“ „halbiert“.

Wie auf der Ebene, so sind auch auf der Sphäre zwei „isotomverwandte“ Gerade harmonisch konjugiert in Bezug auf alle Kegelschnitte des Gewebes

$$F(uu) \equiv \lambda_1 \Psi_1(uu) + \lambda_2 \Psi_2(uu) + \lambda_3 \Psi_3(uu) = 0,$$

wo die Ψ_i die Gleichungen der „Seitenmittenpaare“ bedeuten. Ebenso sind sie auch harmonisch konjugiert in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar, welche die vier Geraden i, i_1, i_2, i_3 zu gemeinsamen Tangenten hat:

$$F(uu) \equiv \Psi_k + \lambda \Psi_l = 0.$$

Denn in beiden Fällen erfüllen die Koordinaten der „isotomverwandten“ Geraden die Bedingung:

$$F(uu') = 0.$$

41. Bezüglich der „isotomverwandten“ Geraden beweisen wir noch folgende zwei Sätze:

a. Gegeben eine willkürliche Gerade L. Auf ihr nehmen wir die ei mit den Ecken R_i des Grund- oder „*Winkelgegenpunkte.*“ Zwischen den Koordinaten x_i und y_i zweier solcher Punkte besteht demnach die Beziehung:

$$x_i y_i = \Omega_{ii}.$$

Die Ecktransversalen zweier „Winkelgegenpunkte“ sind „symmetrisch“ in Bezug auf die entsprechenden „Winkelhalbierenden“. Denn die ersteren werden von den letzteren harmonisch getrennt und daher die Winkel $R_i(PP')$ von den „Winkelhalbierenden“ „halbiert“.

Wie auf der Ebene, so sind auf der Sphäre zwei „isogonalverwandte“ Punkte harmonisch konjugiert in Bezug auf alle Kegelschnitte des Netzes:

$$f(xx) \equiv \lambda_1 \psi_1(xx) + \lambda_2 \psi_2(xx) + \lambda_3 \psi_3(xx) = 0,$$

wo die ψ_i die Gleichungen der „Winkelhalbierendenpaare“ bedeuten. Ebenso sind sie auch harmonisch konjugiert in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels, das die vier Punkte J, J_1, J_2, J_3 zu Grundpunkten hat:

$$f(xx) \equiv \psi_k + \lambda \psi_l = 0.$$

Denn in beiden Fällen erfüllen die Koordinaten der „Winkelgegenpunkte“ die Bedingung:

$$f(xx') = 0.$$

Bezüglich der „isogonalverwandten“ Punkte beweisen wir noch folgende zwei Sätze:

a. Gegeben ein willkürlicher Punkt R. Durch ihn ziehen wir die drei mit den Seiten L_i des

dreiecks harmonisch konjugierten Punkte $\mathfrak{V} R_i L$ und verbinden jeden derselben mit der entsprechenden Ecke R_i. Dann bilden diese drei Ecktransversalen $[R_i R_i L]$ ein neues Dreiseit, dessen Ecken mit den Fusspunkten $\mathfrak{V} L_i L'$ der zu L gehörenden „Seitensymmetriegeraden" L′ harmonisch konjugiert sind.

b. Zur Geraden L ziehen wir die drei mit ihr harmonisch konjugierten Ecktransversalen $\mathfrak{V} L R_i$ und zu jeder derselben nochmals die entsprechende harmonisch konjugierte Scheitelgerade $[R_i L R_i]$. Dann bilden die letztern ein neues Dreiseit, dessen Ecken mit den Fusspunkten $\mathfrak{V} L_i L'$ der „Seitensymmetriegeraden" L′ harmonisch konjugiert sind.

Beweis zu a und b.

Die äusseren Produkte

$$[R_k R_k L \quad R_l R_l L] \text{ oder}$$

$$\mathfrak{V}(R_k L . R_k - \omega_{kk} L)(R_l L . R_l - \omega_{ll} L)$$

stellen die Ecken der neuen Dreiseite dar. Weil die innern Produkte dieser Ausdrücke mit den Schnittpunkten $\mathfrak{V} L_i L'$ Null werden, so sind diese mit den Ecken harmonisch konjugiert:

$$L_2 L . R_2 - \omega_{22} L)(R_3 L . R_3 - \omega_{33} L) \mathfrak{V} L_1 L'$$
$$L_1 L (\omega_{33} R_2 L . R_2 L' - \omega_{22} R_3 L . R_3 L');$$

nun aber ist

$$\omega_{33} R_2 L . R_2 L' = \omega_{22} R_3 L . R_3 L' .$$

Grunddreiseits harmonisch konjugierten Geraden $\mathfrak{V} L_i R$ und bringen jede derselben mit der entsprechenden Seite L_i zum Schnitt. Dann bilden diese drei Fusspunkte $[L_i L_i R]$ ein neues Dreieck, dessen Seiten mit den Ecktransversalen $\mathfrak{V} R_i R'$ des zu R gehörenden „Winkelgegenpunktes" R′ harmonisch konjugiert sind.

b. Zum Punkt R bestimmen wir die drei mit ihm harmonisch konjugierten Punkte $\mathfrak{V} R L_i$ der Dreieckseiten und zu jedem derselben nochmals den auf der entsprechenden Seite liegenden harmonisch konjugierten Punkt $[L_i R L_i]$. Dann bilden die letzterenein neues Dreieck, dessen Seiten mit den Scheitelgeraden $\mathfrak{V} R_i R'$ des „Winkelgegenpunktes" R′ harmonisch konjugiert sind.

Beweis zu a und b.

Die äusseren Produkte

$$[L_k L_k R \quad L_l L_l R] \text{ oder}$$

$$\mathfrak{V}(L_k R . L_k - \Omega_{kk} R)(L_l R . L_l - \Omega_{ll} R)$$

stellen die Seiten der neuen Dreiecke dar. Weil die innern Produkte dieser Ausdrücke mit den Ecktransversalen $\mathfrak{V} R_i R'$ Null werden, so sind diese mit den Seiten harmonisch konjugiert:

$$\mathfrak{V}(L_2 R . L_2 - \Omega_{22} R)(L_3 R . L_3 - \Omega_{33} R) \mathfrak{V} R_1 R'$$
$$= R_1 R (\Omega_{33} L_2 R . L_2 R' - \Omega_{22} L_3 R . L_3 R');$$

nun aber ist

$$\Omega_{33} L_2 R . L_2 R' = \Omega_{22} L_3 R . L_3 R'.$$

42. „Isotome“ und „reziproke“ Punkte.

Ist

$$P \equiv x_1 R_1 + x_2 R_2 + x_3 R_3$$

ein willkürlicher Punkt der Kugel, so sind die Fusspunkte seiner Ecktransversalen:

$$P_i \equiv x_k R_k + x_l R_l .$$

Nun liegt auf jeder Dreieckseite ein Punktquadrupel, bestehend aus den beiden Eckpunkten, einer der „Seitenmitten“ und dem Fusspunkt P_i, mit dem D. V.:

$$(R_k R_l M_{kl} P_i) \equiv (R_k R_l M_{kl}) : (R_k R_l P_i)$$

$$= -\frac{\mu_k}{\mu_l} : -\frac{x_l}{x_k} = \frac{\mu_k}{\mu_l}\frac{x_k}{x_l} .$$

Soll nun das D. V. den reziproken Wert annehmen, so muss der Punkt P_i ersetzt werden durch den Punkt

$$P_i' \equiv \frac{R_k}{\omega_{kk} x_k} + \frac{R_l}{\omega_{ll} x_l} .$$

Offenbar sind die P_i' die Fusspunkte der Ecktransversalen, welche sich in einem Punkte

$$P' \equiv \frac{R_1}{\omega_{11} x_1} + \frac{R_2}{\omega_{22} x_2} + \frac{R_3}{\omega_{33} x_3}$$

schneiden. Die Punkte P_i und P_i' nennen wir „*isotom*“ und die beiden Punkte P und P′ „*reziprok*“.[1]) Zwischen zwei „reziproken“ Punkten x_i und y_i besteht daher die Beziehung

$$x_i y_i = \frac{1}{\omega_{ii}}$$

Das D. V. der obigen Punktquadrupel wird nicht geändert, wenn

„Isogonale“ und „inverse“ Geraden.

Ist

$$p \equiv u_1 L_1 + u_2 L_2 + u_3 L_3$$

eine willkürliche sphärische Gerade, so sind die Ecktransversalen ihrer Fusspunkte:

$$p_i \equiv u_k L_k + u_l L_l .$$

Nun trägt jede Ecke des Grunddreiseits ein Geradenquadrupel, bestehend aus den Dreieckseiten, einer der „Winkelhalbierenden“ und der Ecktransversalen p_i, mit dem D. V.:

$$(L_k I_l m_{kl} p_i) \equiv (L_k L_l m_{kl}) : (L_k L_l p_i)$$

$$= -\frac{\nu_k}{\nu_l} : -\frac{u_l}{u_k} = \frac{\nu_k}{\nu_l}\frac{u_k}{u_l} .$$

Soll nun das D. V. den reziproken Wert annehmen, so muss der Strahl p_i ersetzt werden durch die Gerade

$$p_i' \equiv \frac{L_k}{\Omega_{kk} u_k} + \frac{L_l}{\Omega_{ll} u_l} .$$

Offenbar sind die p_i' die Ecktransversalen, deren Fusspunkte auf der Geraden

$$p' \equiv \frac{L_1}{\Omega_{11} u_1} + \frac{L_2}{\Omega_{22} u_2} + \frac{L_3}{\Omega_{33} u_3}$$

liegen. Die Geraden p_i und p_i' nennen wir „*isogonal*“ und die beiden Geraden p und p′ „*invers*“.[1]) Zwischen zwei „inversen“ Geraden u_i und v_i besteht die Beziehung

$$u_i v_i = \frac{1}{\Omega_{ii}}$$

Das D. V. der obigen Geradenquadrupel wird nicht geändert, wenn

[1]) Die Benennung ist gewählt nach E. Rouché et Ch. de Comberousse, Traité de Géométrie, I. S. 453 und 455. Paris 1900. VII. éd.

die innere „Seitenmitte“ mit der äusseren vertauscht wird. Es liegt demnach eine Involution vor, von welcher die beiden „Seitenmitten“ die Doppelpunkte sind. Bestimmt wird diese Involution durch die Eckpunkte und die Schnittpunkte der Dreieckseite mit dem absoluten Kegelschnitt. Je zwei „isotome“ Punkte sind ein homologes Punktpaar dieser Involution; denn sie bilden mit den „Seitenmitten“ stets ein harmonisches D. V., wie aus den Symbolen dieser Punkte leicht zu ersehen ist.

43. **„Baryzentrum“.** In § 39 haben wir als Schnittpunkt der zu den innern „Seitenmitten“ gehörenden Ecktransversalen gefunden:

$$G \equiv \frac{R_1}{\mu_1} + \frac{R_2}{\mu_2} + \frac{R_3}{\mu_3}.$$

die innere „Winkelhalbierende“ mit der äusseren vertauscht wird. Es liegt demnach eine Involution vor, von welcher die beiden „Winkelhalbierenden“ die Doppelstrahlen sind. Bestimmt wird diese Involution durch die zusammenstossenden Dreieckseiten und die absoluten Tangenten. Je zwei „isogonale“ Gerade sind ein homologes Strahlenpaar dieser Involution; denn sie bilden mit den „Winkelhalbierenden“ stets ein harmonisches D. V., wie aus den Symbolen dieser Strahlen leicht zu ersehen ist.

In § 39 haben wir als Verbindungsgerade der Fusspunkte der innern „Winkelhalbierenden“ gefunden:

$$g \equiv \frac{L_1}{\nu_1} + \frac{L_2}{\nu_2} + \frac{L_3}{\nu_3}.$$

Wenn wir die genannten Ecktransversalen als „*Medianen*“ und ihren Schnittpunkt G als „*Schwerpunkt*“ des Grunddreiecks bezeichnen, so ist dies bereits eine Verallgemeinerung dieser Begriffe, da die Koordinaten von G ganz von der Wahl des absoluten Kegelschnitts abhängen. Den wahren Schwerpunkt bekommen wir als Spezialfall, wenn nämlich die zyklische Kurve als absoluter Kegelschnitt gewählt wird.

Entsprechend können wir die trilineare Polare von G

$$i \equiv \mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + \mu_3 L_3$$

als sphärisches Pendant der unendlich fernen Geraden der Ebene auffassen und ihr den Namen „absolute Gerade“ geben. Später soll indes gezeigt werden, dass sich eine noch weitergehende Verallgemeinerung dieser Gebilde einführen lässt.

Wird die Gerade i (μ_i) als absolute Gerade aufgefasst, so steht

Der trilineare Pol der Geraden g ist

$$J \equiv \nu_1 R_1 + \nu_2 R_2 + \nu_3 R_3.$$

Da dieser Punkt (Schnittpunkt der äusseren „Winkelhabierenden“) das der Geraden i (μ_i) dual entsprechende Gebilde ist, so können wir ihm den Namen „absoluter Punkt“ geben und ihn auch die der absoluten Geraden dual entsprechende Rolle spielen lassen. Dadurch wird auch der Begriff des „Parallelismus“

nichts mehr im Wege, auch auf der Kugel von „Parallelismus“ und den davon abgeleiteten Begriffen zu sprechen.

dualistisch erweitert.

44. „Komplementäre“ und „antikomplementäre“ Punkte und Geraden.

Die inneren „Mitten“ bilden ein Dreieck, das mit dem Grunddreieck perspektivisch ist, mit dem „Schwerpunkt“ G als Zentrum und der absoluten Geraden als Achse der Kollineation.

Die inneren „Winkelhalbierenden“ bilden ein Dreiseit, das mit dem Grunddreiseit perspektivisch ist, mit der Geraden g als Achse und dem absoluten Punkt als Zentrum der Kollineation.

Es ist aber eine Kollineation bestimmt, wenn wir vier Punkten (resp. Geraden) des ersten Systems vier Punkte (resp. Gerade) des zweiten Systems entsprechen lassen.

Einem Punkt des ersten Systems

$$P \equiv x_1 R_1 + x_2 R_2 + x_3 R_3$$

entspricht dann im zweiten System ein Punkt

$$P' \equiv x_1' R_1 + x_2' R_2 + x_3' R_3 ,$$

wo zwischen den Koordinaten x_i und x_i' eine Beziehung besteht von der Form (I):

Einer Geraden des ersten Systems

$$p \equiv u_1 L_1 + u_2 L_2 + u_3 L_3$$

entspricht im zweiten System eine Gerade

$$p' \equiv u_1' L_1 + u_2' L_2 + u_3' L_3 ,$$

wo zwischen den Koordinaten u_i und u_i' eine Beziehung besteht von der Form (II):

$$x_1' : x_2' : x_3' = (b_{11}x_1 + b_{21}x_2 + b_{31}x_3) : (b_{12}x_1 + b_{22}x_2 + b_{32}x_3) : (b_{13}x_1 + b_{23}x_2 + b_{33}x_3).$$

$$u_1' : u_2' : u_3' = (B_{11}u_1 + B_{21}u_2 + B_{31}u_3) : (B_{12}u_1 + B_{22}u_2 + B_{32}u_3) : (B_{13}u_1 + B_{23}u_2 + B_{33}u_3). \quad (\text{II})$$

Wir haben nun im ersten System die Punkte:

$$R_1\,(1,0,0),\ R_2\,(0,1,0),\ R_3\,(0,0,1),$$

$$G\left(\frac{1}{\mu_i}\right)$$

und als ihnen entsprechende Punkte des zweiten Systems:

$$G_1\left(0, \frac{1}{\mu_2}, \frac{1}{\mu_3}\right),\ G_2\left(\frac{1}{\mu_1}, 0, \frac{1}{\mu_3}\right),$$

$$G_3\left(\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}, 0\right),\ G\left(\frac{1}{\mu_i}\right).$$

Nun lassen sich die noch unbekann-

Wir wählen nun im ersten System die Geraden:

$$L_1\,(1,0,0),\ L_2\,(0,1,0),\ L_3\,(0,0,1)$$

$$g\left(\frac{1}{\nu_i}\right)$$

und als ihnen entsprechende Gerade des zweiten Systems:

$$g_1\left(0, \frac{1}{\nu_2}, \frac{1}{\nu_3}\right),\ g_2\left(\frac{1}{\nu_1}, 0, \frac{1}{\nu_3}\right),$$

$$g_3\left(\frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2}, 0\right),\ g\left(\frac{1}{\nu_i}\right).$$

Nun lassen sich die noch unbekann-

ten b Koeffizienten bestimmen, und wir finden, dass den

$$\begin{matrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{matrix}$$

die Werte

$$\begin{matrix} 0 & \frac{\mu_2}{\mu_1} & \frac{\mu_3}{\mu_1} \\ \frac{\mu_1}{\mu_2} & 0 & \frac{\mu_3}{\mu_2} \\ \frac{\mu_1}{\mu_3} & \frac{\mu_2}{\mu_3} & 0 \end{matrix}$$

entsprechen.

Wird nun der Punkt P (x_i) als zum ersten System gehörend aufgefasst, so entspricht ihm im zweiten System der Punkt

$$P' \equiv \frac{\mu_2 x_2 + \mu_3 x_3}{\mu_1} R_1 + \frac{\mu_3 x_3 + \mu_1 x_1}{\mu_2} R_2 + \frac{\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2}{\mu_3} R_3.$$

Wird aber P (x_i) als zum zweiten System gehörend betrachtet, so entspricht ihm im ersten System

$$P'' \equiv \frac{-\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3}{\mu_1} R_1 + \frac{\mu_1 x_1 - \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3}{\mu_2} R_2 + \frac{\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 - \mu_3 x_3}{\mu_3} R_3.$$

Wir nennen nun P′ „Komplementpunkt“ von P, und P″ „Antikomplementpunkt“ von P. Da der Zusammenhang zwischen x_i und x_i' linear ist, so wird, wenn x_i eine Gerade u_i durchläuft, auch x_i' eine entsprechende Gerade u_i' durchlaufen. Bewegt sich demnach der Punkt x_i des ersten Systems auf einer durch

ten B Koeffizienten bestimmen, und wir finden, dass den

$$\begin{matrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{matrix}$$

die Werte

$$\begin{matrix} 0 & \frac{\nu_2}{\nu_1} & \frac{\nu_3}{\nu_1} \\ \frac{\nu_1}{\nu_2} & 0 & \frac{\nu_3}{\nu_2} \\ \frac{\nu_1}{\nu_3} & \frac{\nu_2}{\nu_3} & 0 \end{matrix}$$

entsprechen.

Wird nun die Gerade p (u_i) als zum ersten System gehörend aufgefasst, so entspricht ihr im zweiten System die Gerade

$$p' \equiv \frac{\nu_2 u_2 + \nu_3 u_3}{\nu_1} L_1 + \frac{\nu_3 u_3 + \nu_1 u_1}{\nu_2} L_2 + \frac{\nu_1 u_1 + \nu_2 u_2}{\nu_3} L_3.$$

Wird aber p (u_i) als zum zweiten System gehörend betrachtet, so entspricht ihr im ersten System

$$p'' \equiv \frac{-\nu_1 u_1 + \nu_2 u_2 + \nu_3 u_3}{\nu_1} L_1 + \frac{\nu_1 u_1 - \nu_2 u_2 + \nu_3 u_3}{\nu_2} L_2 + \frac{\nu_1 u_1 + \nu_2 u_2 - \nu_3 u_3}{\nu_3} L_3.$$

Da der Zusammenhang zwischen u_i und u_i' linear ist, so wird, wenn u_i sich um einen Punkt x_i dreht, auch u_i' sich um einen entsprechenden Punkt x_i' drehen. Durchläuft demnach die Gerade u_i des ersten Systems das durch zwei Gerade v_i und w_i bestimmte Strahlenbüschel, so dreht sich die entsprechende

zwei Punkte $y_i z_i$ bestimmten Geraden, so durchläuft sein „Komplementpunkt“ x_i' die Verbindungsgerade von y_i' und z_i'. Ist also

$$u_i = y_k z_l - y_l z_k ,$$
$$\text{so ist } u_i' = y_k' z_l' - y_l' z_k' .$$

Hieraus ergibt sich für die Koordinaten der „Komplementgeraden“ u_i' die Beziehung (I):

Gerade u_i' um den Schnittpunkt der Geraden v_i' und w_i'. Ist also

$$x_i = v_k w_l - v_l w_k ,$$
$$\text{so ist } x_i' = v_k' w_l' - v_l' w_k' .$$

Hieraus ergibt sich für die Koordinaten des Punktes x_i' die Beziehung (II):

$$\frac{u_1'}{\mu_1} : \frac{u_2'}{\mu_2} : \frac{u_3'}{\mu_3} = \left(-\frac{u_1}{\mu_1} + \frac{u_2}{\mu_2} + \frac{u_3}{\mu_3}\right) : \left(\frac{u_1}{\mu_1} - \frac{u_2}{\mu_2} + \frac{u_3}{\mu_3}\right) : \left(\frac{u_1}{\mu_1} + \frac{u_2}{\mu_2} - \frac{u_3}{\mu_3}\right).$$

$$\frac{x_1'}{\nu_1} : \frac{x_2'}{\nu_2} : \frac{x_3'}{\nu_3} = \left(-\frac{x_1}{\nu_1} + \frac{x_2}{\nu_2} + \frac{x_3}{\nu_3}\right) : \left(\frac{x_1}{\nu_1} - \frac{x_2}{\nu_2} + \frac{x_3}{\nu_3}\right) : \left(\frac{x_1}{\nu_1} + \frac{x_2}{\nu_2} - \frac{x_3}{\nu_3}\right).$$

Wird aber die Gerade u_i als zum zweiten System gehörend angesehen, so finden wir für die Koordinaten ihrer „Antikomplementgeraden“ u_i'' die Beziehung:

$$\frac{u_1''}{\mu_1} : \frac{u_2''}{\mu_2} : \frac{u_3''}{\mu_3} =$$
$$\left(\frac{u_2}{\mu_2} + \frac{u_3}{\mu_3}\right) : \left(\frac{u_3}{\mu_3} + \frac{u_1}{\mu_1}\right) : \left(\frac{u_1}{\mu_1} + \frac{u_2}{\mu_2}\right).$$

Wird aber der Punkt x_i als zum zweiten System gehörend angesehen, so finden wir für die Koordinaten des entsprechenden Punktes x_i'' die Beziehung:

$$\frac{x_1''}{\nu_1} : \frac{x_2''}{\nu_2} : \frac{x_3''}{\nu_3} =$$
$$\left(\frac{x_2}{\nu_2} + \frac{x_3}{\nu_3}\right) : \left(\frac{x_3}{\nu_3} + \frac{x_1}{\nu_1}\right) : \left(\frac{x_1}{\nu_1} + \frac{x_2}{\nu_2}\right).$$

45. Zwei entsprechende Punkte P und P′, ebenso P und P″, liegen auf einer durch das Zentrum der Kollineation gehenden Geraden. Denn es sind die innern Produkte

$$G V PP' = 0 , \qquad G V PP'' = 0 .$$

Und zwei homologe Gerade p und p′, sowie p und p″, schneiden sich auf der absoluten Geraden i (μ_i), weil wieder die innern Produkte Null sind:

$$i V pp' = 0 , \qquad i V pp'' = 0 .$$

Der Definition des „Parallelismus“ zufolge sind je zwei homologe Gerade p und p′, p und p″, als „parallel“ zu betrachten.

Zwei entsprechende Gerade p und p′, ebenso p und p″, schneiden sich auf der Kollineationsachse. Denn es sind die innern Produkte

$$g V pp' = 0 , \qquad g V pp'' = 0 .$$

Und zwei homologe Punkte P und P′, sowie P und P″, liegen auf einer Geraden, welche durch den absoluten Punkt J (ν_i) geht, weil wieder die innern Produkte Null sind:

$$J V PP' = 0 , \qquad J V PP'' = 0 .$$

Da G auf der Geraden (P P′) liegt, so ist G auch

$$P - \lambda P'.$$

Der Parameter λ lässt sich leicht bestimmen, wenn man bedenkt, dass das innere Produkt von G mit einer der „Medianen“ Null sein muss. So findet man $\lambda = -1$. Und ähnlich ergibt sich für den Parameter, der zum Schnittpunkt P_0 der Geraden (P P′) mit der absoluten Geraden gehört, $\lambda_0 = \frac{1}{2}$. Folglich ist das D. V.:

$$(P P' G P_0) = -2,$$

also konstant. Ferner ist

$P' \equiv P'' + P$, und $P_0 \equiv P'' - P$.

Folglich ist das D. V.:

$$(P P'' P' P_0) = -1.$$

D. h. P und P″ werden durch P′ und P_0 harmonisch getrennt; P′ „halbiert“ den von einem Punkte P und dessen „Antikomplementpunkt“ P″ begrenzten Bogen. Denn P′ und P_0 sind auch in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt harmonisch konjugiert.

46. „Komplementisotome“ Verwandtschaft.

Nun lässt sich auch die „komplementisotome“ Verwandtschaft, die man durch Verbindung der in §§ 40 und 42 behandelten quadratischen Transformation mit der linearen des § 44 erhält, auf die Kugel ausdehnen.

Genügen die auf das „Mitten“-dreieck G_1 bezogenen Koordinaten

Da g durch den Schnittpunkt (pp′) geht, so ist g auch

$$p - \lambda p'.$$

Der Parameter λ lässt sich leicht bestimmen, wenn man bedenkt, dass das innere Produkt von g mit einem der Fusspunkte der innern „Winkelhalbierenden“ Null sein muss. Daher $\lambda = -1$. Und ähnlich ergibt sich für den Parameter, der zur Verbindungsgeraden p_0 des Punktes (p p′) mit dem absoluten Punkt gehört, $\lambda_0 = \frac{1}{2}$. Folglich ist das D. V.:

$$(p p' g p_0) = -2,$$

also konstant. Ferner ist

$p' \equiv p'' + p$, und $p_0 \equiv p'' - p$.

Folglich ist das D. V.:

$$(p p'' p' p_0) = -1.$$

D. h. p und p″ werden durch p′ und p_0 harmonisch getrennt; p′ „halbiert“ den von einer Geraden p und der entsprechenden Geraden p″ gebildeten Winkel. Denn p′ und p_0 sind auch in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt harmonisch konjugiert.

„Komplementisogonale“ Verwandtschaft.

Nun lässt sich auch die „komplementisogonale“ Verwandtschaft, die man durch Verbindung der in §§ 40 und 42 behandelten quadratischen Transformation mit der linearen des § 44 erhält, auf die Kugel ausdehnen.

Genügen die auf das Dreiseit der innern „Winkelhalbierenden“

y_i' eines Punktes der Bedingung:

$$x_i y_i' = \frac{1}{\omega_{ii}},$$

so nennen wir diesen Punkt den mit x_i „*komplementisotom*" verwandten *Punkt*. Ersetzen wir in vorstehender Bedingung die Koordinaten y_i' durch die in § 44 gefundenen Werte in Bezug auf das Grunddreieck:

$$\mu_i y_i' = -\mu_i y_i + \mu_k y_k + \mu_l y_l,$$

so finden wir, dass in Bezug auf das Grunddreieck zwischen den Koordinaten zweier „komplementisotomen" Punkte die Beziehung besteht:

$$y_i \therefore x_i \ (\mu_k x_k + \mu_l x_l).$$

Die Gerade, deren auf das „Mittendreieck" G_i bezogenen Koordinaten v_i' der Bedingung genügen:

$$u_i v_i' = \omega_{ii},$$

nennen wir die mit der Geraden u_i „*komplementisotom*" verwandte *Gerade*. Ersetzen wir in dieser Bedingung die Koordinaten v_i' wieder durch die in § 44 gefundenen Koordinatenwerte in Bezug auf das Grunddreieck:

$$\frac{2 v_i'}{\mu_i} = \frac{v_k}{\mu_k} + \frac{v_l}{\mu_l},$$

so finden wir, dass in Bezug auf das Grunddreieck zwischen den Koordinaten zweier „komplementisotomen" Geraden die Beziehung gilt:

$$v_i \therefore \mu_i \left(-\frac{\mu_i}{u_i} + \frac{\mu_k}{u_k} + \frac{\mu_l}{u_l} \right).$$

w_i bezogenen Koordinaten v_i' einer Geraden der Bedingung:

$$u_i v_i' = \frac{1}{\Omega_{ii}},$$

so nennen wir diese Gerade die mit u_i „*komplementisogonal*" verwandte *Gerade*. Ersetzen wir in vorstehender Bedingung die Koordinaten v_i' durch die in § 44 gefundenen Werte in Bezug auf das Grunddreiseit:

$$\nu_i v_i' = -\nu_i v_i + \nu_k v_k + \nu_l v_l,$$

so finden wir, dass in Bezug auf das Grunddreiseit zwischen den Koordinaten zweier „komplementisogonalen" Geraden die Beziehung besteht:

$$v_i \therefore u_i \ (\nu_k u_k + \nu_l u_l).$$

Der Punkt, dessen auf das „Winkelhalbiererdreiseit" w_i bezogenen Koordinaten y_i' der Bedingung genügen:

$$x_i y_i' = \Omega_{ii},$$

nennen wir den mit dem Punkt x_i „*komplementisogonal*" verwandten *Punkt*. Ersetzen wir in dieser Bedingung die Koordinaten y_i' wieder durch in § 44 gefundenen Werte in Bezug auf das Grunddreiseit:

$$\frac{2 y_i'}{\nu_i} = \frac{y_k}{\nu_k} + \frac{y_l}{\nu_l},$$

so finden wir, dass in Bezug auf das Grunddreiseit zwischen den Koordinaten zweier „komplementisogonaler" Punkte die Beziehung gilt:

$$y_i \therefore \nu_i \left(-\frac{\nu_i}{x_i} + \frac{\nu_k}{x_k} + \frac{\nu_l}{x_l} \right).$$

47. „Punkt und Gerade von Lemoine".

Definieren wir die zu den inneren „Medianen" „isogonalen" Geraden:

$$\frac{L_k}{\mu_k \Omega_{kk}} - \frac{L_l}{\mu_l \Omega_{ll}}$$

als „*Symmedianen*", so haben wir folglich den Schnittpunkt derselben als „*Punkt von Lemoine*" zu bezeichnen:

$$K \equiv \mu_1 \Omega_{11} R_1 + \mu_2 \Omega_{22} R_2 + \mu_3 \Omega_{33} R_3.$$

K ist in der Tat mit dem „Schwerpunkt" $G\left(\frac{1}{\mu_i}\right)$ „isogonal" verwandt. Die trilineare Polare von K

$$k \equiv \frac{L_1}{\mu_1 \Omega_{11}} + \frac{L_2}{\mu_2 \Omega_{22}} + \frac{L_3}{\mu_3 \Omega_{33}}$$

ist demnach die „*Gerade von Lemoine*". Sie ist die „inverse" Gerade der absoluten Geraden $i\,(\mu_i)$. (§ 42).

Die äusseren „Symmedianen"

$$\frac{L_k}{\mu_k \Omega_{kk}} + \frac{L_l}{\mu_l \Omega_{ll}}$$

schneiden sich offenbar nicht in einem Punkte, wohl aber die erste innere, die zweite und dritte äussere „Symmediane", ebenso die zweite innere, die dritte und erste äussere, endlich die dritte innere, die erste und zweite äussere „Symmediane", und zwar in den Punkten

$$-\mu_l \Omega_{ll} R_l + \mu_k \Omega_{kk} R_k + \mu_l \Omega_{ll} R_l.$$

Dies sind die mit K harmonisch assoziierten Punkte; sie sind die „Winkelgegenpunkte" der mit dem „Schwerpunkt" G harmonisch assoziierten Punkte.

Die zu den Fusspunkten der inneren „Bissectrices" „isotomen" Punkte:

$$\frac{R_k}{\nu_k \omega_{kk}} - \frac{R_l}{\nu_l \omega_{ll}}$$

liegen auf einer Geraden:

$$k' \equiv \nu_1 \omega_{11} L_1 + \nu_2 \omega_{22} L_2 + \nu_3 \omega_{33} L_3.$$

k′ ist mit der Geraden $g\left(\frac{1}{\nu_i}\right)$ „isotom" verwandt. Der trilineare Pol von k′ ist

$$K' \equiv \frac{R_1}{\nu_1 \omega_{11}} + \frac{R_2}{\nu_2 \omega_{22}} + \frac{R_3}{\nu_3 \omega_{33}},$$

dies ist der „reziproke" Punkt des absoluten Punktes $J\,(\nu_i)$ (§ 42).

Die zu den Fusspunkten der äusseren „Winkelhalbierenden" „isotomen" Punkte

$$\frac{R_k}{\nu_k \omega_{kk}} + \frac{R_l}{\nu_l \omega_{ll}}$$

liegen offenbar nicht in einer Geraden, wohl aber die „isotomen" Punkte, die zum Fusspunkt der ersten innern „Bissectrix", der zweiten und dritten äusseren, dann der zweiten innern, der dritten und ersten äusseren, endlich der dritten innern, der ersten und und zweiten äussern „Bissectrix" gehören, und zwar liegen sie auf den Geraden

$$-\nu_l \omega_{ll} L_l + \nu_k \omega_{kk} L_k + \nu_l \omega_{ll} L_l.$$

Dies sind die mit k′ harmonisch assoziierten Geraden; dieselben sind die „Seitensymmetriegeraden" der mit der Geraden g harmonisch assoziierten Geraden.

48. **„Umkreiszentrum“.**

Den absoluten Pol der Geraden $i(\mu_i)$ (§ 43)

$$O \equiv \Omega'(\mu_1)R_1 + \Omega'(\mu_2)R_2 + \Omega'(\mu_3)R_3$$

definieren wir als „*Zentrum*“ des „*Umkreises*“ *des Grunddreiecks*. Es ist der Schnittpunkt der durch die innern „Seitenmitten“ G_i (§ 39) [1]) gezogenen und mit den betreffenden Dreieckseiten harmonisch konjugierten Geraden $\mathsf{V}G_iL_i$. Denn die absoluten Pole dieser letztern sind die entsprechenden äusseren „Seitenmitten“, und diese liegen in der absoluten Geraden $i(\mu_i)$. Durchläuft aber ein Punkt eine Gerade, so dreht sich die zugehörige Polare um den Pol der vom Punkt durchlaufenen Geraden.

Von selbst ergeben sich nun auch die „*Umkreiszentren*“ der dem Grunddreieck *anliegenden* Dreiecke $-R_iR_kR_l$:

$$O_i \equiv -\Omega'(\mu_i)R_i + \Omega'(\mu_k)R_k + \Omega'(\mu_l)R_l.$$

Hieraus sehen wir unmittelbar, dass die drei „Zentren“ O_i mit O harmonisch assoziiert sind.

Wird ein absolutes Polardreieck als Koordinatendreieck gewählt, so werden die Koeffizienten $\Omega_{kl} = 0$, und das „Umkreiszentrum“ bekommt das Symbol

$$\mu_1\Omega_{11}R_1 + \mu_2\Omega_{22}R_2 + \mu_3\Omega_{33}R_3;$$

es fällt also mit dem „Punkt K von Lemoine“ (§ 47) zusammen.

„Inkreiszentrum“.

Den Punkt $J(\nu_i)$ (§ 43), dessen absolute Polare ist:

$$o \equiv \omega'(\nu_1)L_1 + \omega'(\nu_2)L_2 + \omega'(\nu_3)L_3$$

definieren wir als „*Zentrum*“ des „*Inkreises*“ *des Grunddreiseits*. Die Gerade o ist die Verbindungsgerade der auf den innern „Winkelhalbierenden“ w_i (§ 39) [1]) liegenden und mit den betreffenden Ecken harmonisch konjugierten Punkte $\mathsf{V}w_iR_i$. Denn die absoluten Polaren dieser letzteren sind die entsprechenden äusseren „Winkelhalbierenden“, und diese schneiden sich in dem absoluten Punkte $J(\nu_i)$. Dreht sich aber eine Gerade um einen Punkt, so durchläuft der zugehörige Pol die Polare des Punktes, um den sich die Gerade dreht.

Von selbst ergeben sich nun auch die „*Inkreiszentren*“ der dem Grunddreiseit *anliegenden* Dreiseite $-L_iL_kL_l$:

$$o_i \equiv -\omega'(\nu_i)L_i + \omega'(\nu_k)L_k + \omega'(\nu_l)L_l.$$

Hieraus sehen wir unmittelbar, dass die durch die „Ankreiszentren“ charakterisierten Geraden o_i mit o harmonisch assoziiert sind.

Wird ein absolutes Polardreiseit als Koordinatendreiseit gewählt, so werden die Koeffizienten $\omega_{kl} = 0$, und die das „Inkreiszentrum“ vertretende Gerade bekommt das Symbol:

$$\nu_1\omega_{11}L_1 + \nu_2\omega_{22}L_2 + \nu_3\omega_{33}L_3;$$

sie fällt also mit der Geraden k′ (§ 47) zusammen.

---

[1]) $G_i \equiv \frac{R_k}{\mu_k} + \frac{R_l}{\mu_l}$ und dazu dual $w_i \equiv \frac{L_k}{\nu_k} + \frac{L_l}{\nu_l}$.

49. Besteht auf der Sphäre auch die „*Gerade von Euler*“, d. h. liegen „Schwerpunkt“ G, „Höhenpunkt“ H und „Umkreiszentrum“ O in einer Geraden? Im allgemeinen nicht, denn die Determinante der Koordinaten dieser Punkte ist von Null verschieden. Dieselbe wird Null im Spezialfalle, wo

$$\mu_2 \mu_3 \Omega_{23} = \mu_3 \mu_1 \Omega_{31} = \mu_1 \mu_2 \Omega_{12} \quad \text{ist.}$$

Auch ist im allgemeinen die „Gerade von Lemoine“ $k\left(\frac{1}{\mu_i \Omega_{ii}}\right)$ mit der Geraden

$$\equiv \left(\mu_2 \Omega_{22} \Omega'(\mu_3) - \mu_3 \Omega_{33} \Omega'(\mu_2)\right) L_1 + \left(\mu_3 \Omega_{33} \Omega'(\mu_1) - \mu_1 \Omega_{11} \Omega'(\mu_3)\right) L_2 + (\ldots) L_3$$

auf der Sphäre nicht harmonisch konjugiert, weil das innere Produkt der beiden Geraden nicht Null wird.

50. **„Zyklische Geraden“.** Sei

$$\begin{aligned}\varphi(xx) \equiv\ & \varphi_{11} x_1^2 + \varphi_{22} x_2^2 + \varphi_{33} x_3^2 \\ & + 2\,\varphi_{12} x_1 x_2 + 2\,\varphi_{23} x_2 x_3 \\ & + 2\,\varphi_{31} x_3 x_1 = 0\end{aligned}$$

ein willkürlicher reeller sphärischer Kegelschnitt. Als „*zyklische*“ *Geraden* desselben definieren wir die Verbindungsgeraden der vier Grundpunkte des Kegelschnittbüschels:

$$\varphi(xx) - \lambda\,\omega(xx) = 0.$$

Wir erhalten demnach drei Paare „zyklischer“ Geraden, wenn die vorstehende Gleichung in zwei lineare Faktoren zerfällt. Hiefür muss offenbar λ so gewählt werden, dass die Diskriminante Null wird:

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} - \lambda\omega_{11} & \varphi_{12} - \lambda\omega_{12} & \varphi_{13} - \lambda\omega_{13} \\ \varphi_{12} - \lambda\omega_{12} & \varphi_{22} - \lambda\omega_{22} & \varphi_{23} - \lambda\omega_{23} \\ \varphi_{13} - \lambda\omega_{13} & \varphi_{23} - \lambda\omega_{23} & \varphi_{33} - \lambda\omega_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Da diese Gleichung in Bezug auf λ vom dritten Grad ist, so sind die drei Paare „zyklischer“ Geraden des Kegelschnittes $\varphi(xx)$ entweder alle reell, oder es ist nur ein Paar reell

„Brennpunkte.“ Sei

$$\begin{aligned}\Psi(uu) \equiv\ & \psi_{11} u_1^2 + \psi_{22} u_2^2 + \psi_{33} u_3^2 \\ & + 2\,\psi_{12} u_1 u_2 + 2\,\psi_{23} u_2 u_3 \\ & + 2\,\psi_{31} u_3 u_1 = 0\end{aligned}$$

die Klassengleichung des willkürlichen reellen sphärischen Kegelschnittes $\varphi(xx) = 0$. Dann definieren wir als „*Brennpunkte*“ desselben die Schnittpunkte der vier Fundamentaltangenten der Kegelschnittschaar:

$$\Psi(uu) - \lambda\,\Omega(uu) = 0.$$

Wir erhalten demnach drei „Brennpunktpaare“, wenn die vorstehende Gleichung in zwei lineare Faktoren zerfällt. Hiefür muss offenbar λ so gewählt werden, dass die Diskriminante Null wird:

$$\begin{vmatrix} \psi_{11} - \lambda\Omega_{11} & \psi_{12} - \lambda\Omega_{12} & \psi_{13} - \lambda\Omega_{13} \\ \psi_{12} - \lambda\Omega_{12} & \psi_{22} - \lambda\Omega_{22} & \psi_{23} - \lambda\Omega_{23} \\ \psi_{13} - \lambda\Omega_{13} & \psi_{23} - \lambda\Omega_{23} & \psi_{33} - \lambda\Omega_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Da diese Gleichung in Bezug auf λ vom dritten Grad ist, so sind die drei „Brennpunktpaare“ des Kegelschnitts $\Psi(uu)$ entweder alle reell, oder es ist nur ein Paar reell und

und die beiden anderen sind imaginär. Und zwar wird das erstere der Fall sein, wenn nicht bloss $\varphi(xx)$, sondern auch der absolute Ordnungskegelschnitt $\omega(xx)$ reell ist; das letztere hingegen, wenn $\omega(xx)$ imaginär ist.

Die obige Bedingungsgleichung wird vereinfacht, wenn $\varphi(xx)$ und $\omega(xx)$ durch eine Koordinatentransformation auf das absolute Polardreieck bezogen werden. Denn dann verschwinden in den Gleichungen die Glieder mit den Produkten der Variabeln, und wir bekommen für $\varphi(xx)$ und $\omega(xx)$:

$$\varphi_1(xx) \equiv \varphi_{11}' x_1^2 + \varphi_{22}' x_2^2 + \varphi_{33}' x_3^2 = 0$$
$$\omega_1(xx) \equiv \omega_{11}' x_1^2 + \omega_{22}' x_2^2 + \omega_{33}' x_3^2 = 0.$$

Da $\varphi_1(xx)$ reell sein soll, so muss ein Koeffizient negativ sein, etwa φ_{33}'.

Nun wird die Diskriminante, in der wir statt φ' und ω' wieder φ und ω schreiben wollen:

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11}-\lambda\omega_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{22}-\lambda\omega_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -(\varphi_{33}+\lambda\omega_{33}) \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(\varphi_{11}-\lambda\omega_{11})(\varphi_{22}-\lambda\omega_{22})(\varphi_{33}+\lambda\omega_{33}) = 0.$$

Den drei Wurzeln

$$\frac{\varphi_{11}}{\omega_{11}}, \frac{\varphi_{22}}{\omega_{22}}, -\frac{\varphi_{33}}{\omega_{33}}$$

entsprechen nun die „zyklischen" Geradenpaare:

$$(\varphi_{22}\omega_{11} - \varphi_{11}\omega_{22})\, x_2^2 - (\varphi_{33}\omega_{11} + \varphi_{11}\omega_{33})\, x_3^2 = 0$$
$$(\varphi_{33}\omega_{22} + \varphi_{22}\omega_{33})\, x_3^2 - (\varphi_{11}\omega_{22} - \varphi_{22}\omega_{11})\, x_1^2 = 0$$

die beiden anderen sind imaginär. Und zwar wird das erstere der Fall sein, wenn nicht bloss $\Psi(uu)$, sondern auch der absolute Klassenkegelschnitt $\Omega(uu)$ reell ist; das letztere hingegen, wenn $\Omega(uu)$ imaginär ist.

Die obige Bedingungsgleichung wird vereinfacht, wenn $\varphi(xx)$ und $\omega(xx)$ durch eine Koordinatentransformation auf das absolute Polardreieck bezogen werden. Denn dann gehen die Klassengleichungen dieser Kegelschnitte über in:

$$\Psi_1(uu) \equiv \varphi_{22}' \varphi_{33}' u_1^2 + \varphi_{33}' \varphi_{11}' u_2^2 + \varphi_{11}' \varphi_{22}' u_3^2 = 0$$
$$\Omega_1(uu) \equiv \omega_{22}' \omega_{33}' u_1^2 + \omega_{33}' \omega_{11}' u_2^2 + \omega_{11}' \omega_{22}' u_3^2 = 0.$$

Nun wird die Diskriminante, in der wir statt φ' und ω' wieder φ und ω schreiben wollen:

$$\begin{vmatrix} \varphi_{22}\varphi_{33}-\lambda\omega_{22}\omega_{33} & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{33}\varphi_{11}-\lambda\omega_{33}\omega_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -(\varphi_{11}\varphi_{22}+\lambda\omega_{11}\omega_{22}) \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(\varphi_{22}\varphi_{33}-\lambda\omega_{22}\omega_{33})(\varphi_{33}\varphi_{11}-\omega_{33}\omega_{11})(\varphi_{11}\varphi_{22}+\lambda\omega_{11}\omega_{22}) = 0.$$

Den drei Wurzeln

$$\frac{\varphi_{22}\varphi_{33}}{\omega_{22}\omega_{33}}, \frac{\varphi_{33}\varphi_{11}}{\omega_{33}\omega_{11}}, -\frac{\varphi_{11}\varphi_{22}}{\omega_{11}\omega_{22}}$$

entsprechen nun die „Brennpunktpaare":

$$\varphi_{33}\omega_{33}(\varphi_{11}\omega_{22}-\varphi_{22}\omega_{11})\, u_2^2 - \varphi_{22}\omega_{22}(\varphi_{11}\omega_{33}+\varphi_{33}\omega_{11})\, u_3^2 = 0$$
$$\varphi_{11}\omega_{11}(\varphi_{22}\omega_{33}+\varphi_{33}\omega_{22})\, u_3^2 - \varphi_{33}\omega_{33}(\varphi_{22}\omega_{11}-\varphi_{11}\omega_{22})\, u_1^2 = 0$$

$$(\varphi_{11}\omega_{33} + \varphi_{33}\omega_{11})\ x_1^2$$
$$+ (\varphi_{22}\omega_{33} + \varphi_{33}\omega_{22})\ x_2^2 = 0.$$

Wie man aus diesen Gleichungen sieht, geht das erste Paar der „zyklischen" Geraden durch den ersten Eckpunkt, u. s. w. Diese Geraden sind allen Kegelschnitten des Büschels

$$\varphi_{11}x_1^2 + \varphi_{22}x_2^2 - \varphi_{33}x_3^2$$
$$-\lambda(\omega_{11}x_1^2 + \omega_{22}x_2^2 + \omega_{33}x_3^2) = 0$$

gemeinsam, aus welchem wir für $\lambda = 0$ unsern reellen Kegelschnitt $\varphi(xx)$, resp. $\Psi(uu)$, bekommen.

Wird ferner

$$\frac{\varphi_{11}}{\omega_{11}} = \frac{\varphi_{22}}{\omega_{22}},$$

so fallen die Geraden des ersten und zweiten Paares zusammen, und zwar mit der dritten Seite des absoluten Polardreiecks. Ist

$$\frac{\varphi_{22}}{\omega_{22}} = -\frac{\varphi_{33}}{\omega_{33}},$$

so fallen die Geraden des zweiten und dritten Paares mit der ersten Seite zusammen. Und ist endlich

$$-\frac{\varphi_{33}}{\omega_{33}} = \frac{\varphi_{11}}{\omega_{11}},$$

so vereinigen sich die Geraden des dritten und ersten Paares mit der zweiten Seite. Hieraus folgt, dass das Zusammenfallen der Geraden eines Paares stets die Gleichheit zweier λ Werte voraussetzt, und dass nie die Geraden bloss eines einzigen Paares sich vereinigen, sondern dann immer noch dazu diejenigen eines zweiten Paares.

$$\varphi_{22}\omega_{22}\ (\varphi_{33}\omega_{11} + \varphi_{11}\omega_{33})\ u_1^2$$
$$+ \varphi_{11}\omega_{11}\ (\varphi_{33}\omega_{22} + \varphi_{22}\omega_{33})\ u_2^2 = 0.$$

Wie man aus diesen Gleichungen sieht, liegt das erste „Brennpunktpaar" auf der ersten Seite des absoluten Polardreiseits, das zweite auf der zweiten Seite, u. s. w. Diese „Brennpunkte" sind allen Kurven der Schaar

$$\varphi_{22}\omega_{33}u_1^2 + \varphi_{33}\omega_{11}u_2^2 - \varphi_{11}\omega_{22}u_3^2 -$$
$$\lambda(\omega_{22}\omega_{33}u_1^2 + \omega_{33}\omega_{11}u_2^2 + \omega_{11}\omega_{22}u_3^2) = 0$$

gemeinsam, aus der wir für $\lambda = 0$ unsern reellen Kegelschnitt $\Psi(uu)$, resp. $\varphi(xx)$, bekommen.

Wird ferner

$$\frac{\varphi_{11}}{\omega_{11}} = \frac{\varphi_{22}}{\omega_{22}},$$

so fallen die Punkte des ersten und zweiten Paares zusammen, und zwar mit dem dritten Eckpunkt des absoluten Polardreiseits. Ist

$$\frac{\varphi_{22}}{\omega_{22}} = -\frac{\varphi_{33}}{\omega_{33}},$$

so fallen die Punkte des zweiten und dritten Paares mit dem ersten Eckpunkt zusammen. Und ist endlich

$$-\frac{\varphi_{33}}{\omega_{33}} = \frac{\varphi_{11}}{\omega_{11}},$$

so vereinigen sich die Punkte des dritten und ersten Paares im zweiten Eckpunkt. Hieraus folgt, dass das Zusammenfallen der Punkte eines Paares stets die Gleichheit zweier λ Werte voraussetzt, und dass nie die „Brennpunkte" bloss eines einzigen Paares sich vereinigen, sondern dann immer auch noch diejenigen eines zweiten Paares.

Im Spezialfalle, wo als absoluter Kegelschnitt die zyklische Kurve

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

gewählt wird, ergeben sich aus den obigen Gleichungen die gewöhnlichen zyklischen Geraden. Dann kann nur die Gleichung eines einzigen Paares in lineare Faktoren mit reellen Koeffizienten zerlegt werden. Es gibt also in diesem Falle nur zwei reelle zyklische Geraden, die andern vier sind imaginär.

51. **Umkegelschnitte, „Umkreise".**

In § 40 haben wir die allgemeinen Symbole der „Seitensymmetriegeraden" gefunden. Aus den Symbolen ergeben sich unmittelbar die Gleichungen derselben:

$$p \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

$$p' \equiv \frac{\omega_{11}}{u_1} x_1 + \frac{\omega_{22}}{u_2} x_2 + \frac{\omega_{33}}{u_3} x_3 = 0.$$

Folglich lässt sich das Paar der „Seitensymmetriegeraden" darstellen durch:

$$\omega_{11} x_1^2 + \omega_{22} x_2^2 + \omega_{33} x_3^2 + 2\beta_{12} x_1 x_2 + 2\beta_{23} x_2 x_3 + 2\beta_{31} x_3 x_1 = 0.$$

Es stimmt also die Gleichung eines „Seitensymmetriegeradenpaares" in den Koeffizienten der rein quadratischen Glieder mit der Ordnungsgleichung des absoluten Kegelschnitts überein. Liegt umgekehrt ein Geradenpaar vor, dessen Gleichung diese Eigenschaft aufweist, so besteht es aus zwei „Seitensymmetriegeraden".

Diesen Satz werden wir auf die

Im Spezialfalle, wo als absoluter Kegelschnitt die zyklische Klassenkurve

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$$

gewählt wird, ergeben sich aus den obigen Gleichungen die gewöhnlichen Brennpunktpaare. Dann kann nur die Gleichung eines einzigen Paares in lineare Faktoren mit reellen Koeffizienten zerlegt werden. Es gibt also in diesem Falle nur zwei reelle Brennpunkte, die andern vier sind imaginär.

Inkegelschnitte, „Inkreis und Ankreise".

In § 40 haben wir die allgemeinen Symbole der „Winkelgegenpunkte" gefunden. Aus den Symbolen ergeben sich unmittelbar die Gleichungen derselben:

$$P \equiv x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0$$

$$P' \equiv \frac{\Omega_{11}}{x_1} u_1 + \frac{\Omega_{22}}{x_2} u_2 + \frac{\Omega_{33}}{x_3} u_3 = 0.$$

Folglich lässt sich ein „Winkelgegenpunktpaar" darstellen durch:

$$\Omega_{11} u_1^2 + \Omega_{22} u_2^2 + \Omega_{33} u_3^2 + 2 b_{12} u_1 u_2 + 2 b_{23} u_2 u_3 + 2 b_{31} u_3 u_1 = 0.$$

Es stimmt also die Gleichung eines „Winkelgegenpunktpaares" in den Koeffizienten der rein quadratischen Glieder mit der Klassengleichung des absoluten Kegelschnitts überein. Liegt demnach umgekehrt ein Punktpaar vor, dessen Gleichung diese Eigenschaft aufweist, so besteht es aus zwei „Winkelgegenpunkten".

Diesen Satz wenden wir auf

„zyklischen“ Geraden der Umkegelschnitte eines willkürlichen Fundamentaldreiecks an. Die allgemeine Gleichung der Umkegelschnitte lautet:

$$\varphi(xx) \equiv \varphi_{12} x_1 x_2 + \varphi_{23} x_2 x_3 + \varphi_{31} x_3 x_1 = 0.$$

Nun lässt sich für die Gleichung des „konzyklischen“ Kegelschnittbüschels schreiben:

$$\omega(xx) - \lambda' \varphi(xx) = 0.$$

Da nun die Koeffizienten der Glieder x_i^2 die obige Bedingung erfüllen, so sind die „zyklischen“ Geraden der Umkegelschnitte „Seitensymmetriegeraden“. Und sind umgekehrt zwei „Seitensymmetriegerade“ gegeben, so können wir sie als eines der „zyklischen“ Geradenpaare eines Umkegelschnitts auffassen.

Suchen wir nun zu den in § 39 gefundenen Geraden

$$i(\mu_i), i_1(-\mu_1, \mu_2, \mu_3),$$
$$i_2(\mu_1, -\mu_2, \mu_3), i_3(\mu_1, \mu_2, -\mu_3)$$

die „Seitensymmetriegeraden“, so finden wir, dass jede derselben sich selbst entspricht. Denn die Koordinaten einer jeder von ihnen erfüllen die Bedingung

$$u_i v_i = \omega_{ii}.$$

Darum lässt sich jede dieser Geraden, doppelt genommen, als „zyklisches“ Geradenpaar eines Umkegelschnitts $\varphi(xx)$ betrachten. Daher muss die Identität bestehen:

$$(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3)^2 \equiv \omega(xx) - \lambda\varphi(xx) = 0.$$

Hieraus lässt sich jetzt leicht der

die „Brennpunkte“ der Inkegelschnitte eines willkürlichen Fundamentaldreiseits an. Die allgemeine Gleichung der Inkelgelschnitte lautet:

$$\Psi(uu) \equiv \psi_{12} u_1 u_2 + \psi_{23} u_2 u_3 + \psi_{31} u_3 u_1 = 0.$$

Nun lässt sich für die Gleichung der „konfokalen“ Kegelschnittschaar schreiben:

$$\Omega(uu) - \lambda' \Psi(uu) = 0.$$

Da nun die Koeffizienten der Glieder u_i^2 die obige Bedingung erfüllen, so sind die „Brennpunkte“ der Inkegelschnitte „Winkelgegenpunkte“. Und sind umgekehrt zwei „Winkelgegenpunkte“ gegeben, so können wir sie als eines der „Brennpunktpaare“ eines Inkegelschnitts auffassen.

Suchen wir nun zu den in § 39 gefundenen Punkten

$$J(\nu_i), J_1(-\nu_1, \nu_2, \nu_3),$$
$$J_2(\nu_1, -\nu_2, \nu_3), J_3(\nu_1, \nu_2, -\nu_3)$$

die „Winkelgegenpunkte“, so finden wir, dass jeder derselben sich selbst entspricht. Denn die Koordinaten eines jeden von ihnen erfüllen die Bedingung

$$x_i y_i = \Omega_{ii}.$$

Darum lässt sich jeder dieser Punkte, doppelt genommen, als „Brennpunktpaar“ eines Inkegelschnitts $\Psi(uu)$ betrachten. Daher muss die Identität bestehen:

$$(\nu_1 u_1 + \nu_2 u_2 + \nu_3 u_3)^2 \equiv \Omega(uu) - \lambda\Psi(uu) = 0.$$

Hieraus können wir jetzt leicht den

Umkegelschnitt $\varphi(xx)$, für den ein „zyklisches" Geradenpaar in der absoluten Geraden i zusammenfällt, bestimmen:

$$(\omega_{12} - \mu_1\mu_2)x_1x_2 + (\omega_{23} - \mu_2\mu_3)x_2x_3 + (\omega_{31} - \mu_3\mu_1)x_3x_1 \equiv (\mu_1x_1 + \mu_2x_2 + \mu_3x_3)^2 - \omega(xx) = 0.$$

Definieren wir einen sphärischen Kegelschnitt, für welchen ein „zyklisches" Geradenpaar zusammenfällt, als „*Kreis*", so haben wir im Vorstehenden die Gleichung des „*Umkreises*" gefunden. Suchen wir das „*Zentrum*" desselben als Pol der absoluten Geraden in Bezug auf ihn selbst, indem wir mit Hilfe der geränderten Determinante die „Umkreisgleichung" in Linienkoordinaten ausdrücken:

$$\Sigma(\omega_{kl} - \mu_k\mu_l)u_l^2 - 2\Sigma(\omega_{li} - \mu_l\mu_i)(\omega_{ik} - \mu_i\mu_k)u_ku_l = 0,$$

so finden wir in der Tat den Punkt O, den wir schon in § 48 als „Umkreiszentrum" definiert haben.

Ersetzen wir die Gerade i (μ_i) durch die mit ihr harmonisch assoziierten Geraden $i_i\,(-\mu_i, \mu_k, \mu_l)$, so bekommen wir die Gleichungen der „Umkreise" der anliegenden Dreiecke $-R_iR_kR_l$:

$$(-\mu_ix_i + \mu_kx_k + \mu_lx_l)^2 - \omega(xx) = 0.$$

Aus dieser Form der Gleichungen sehen wir direkt, dass die „Umkreise" mit dem absoluten Kegelschnitt doppelte Berührung besitzen, in der die Geraden i, i_i die entsprechenden Berührungssehnen bilden.

Aus unserer Definition des „Kreises" folgt ferner, dass der Kegel-

Inkegelschnitt $\Psi(uu)$, für den ein „Brennpunktpaar" im absoluten Punkte J zusammenfällt, bestimmen:

$$(\Omega_{12} - \nu_1\nu_2)u_1u_2 + (\Omega_{23} - \nu_2\nu_3)u_2u_3 + (\Omega_{31} - \nu_3\nu_1)u_3u_1 \equiv (\nu_1u_1 + \nu_2u_2 + \nu_3u_3)^2 - \Omega(uu) = 0.$$

Definieren wir einen sphärischen Kegelschnitt, für welchen ein „Brennpunktpaar" zusammenfällt, als „*Kreis*", so haben wir im Vorstehenden die Gleichung des „*Inkreises*" gefunden. Suchen wir das „*Zentrum*" desselben als Polare des absoluten Punktes in Bezug auf den „Inkreis" selbst, indem wir mit Hilfe der geränderten Determinante die „Inkreisgleichung" in Punktkoordinaten ausdrücken:

$$\Sigma(\Omega_{kl} - \nu_k\nu_l)x_l^2 - 2\Sigma(\Omega_{li} - \nu_l\nu_i)(\Omega_{ik} - \nu_i\nu_k)x_kx_l = 0,$$

so finden wir in der Tat die Gerade o, deren absoluten Pol wir schon in § 48 als „Inkreiszentrum" definiert haben.

Ersetzen wir den Punkt J (ν_i) durch die mit ihm harmonisch assoziierten Punkte $J_i\,(-\nu_i, \nu_k, \nu_l)$, so bekommen wir die Gleichungen der „Inkreise" der anliegenden Dreiseite $-L_iL_kL_l$:

$$(-\nu_iu_i + \nu_ku_k + \nu_lu_l)^2 - \Omega(uu) = 0.$$

Aus dieser Form der Gleichungen sehen wir direkt, dass die „Inkreise" mit dem absoluten Kegelschnitt doppelte Berührung besitzen, in der die Punkte J, J_i die entsprechenden Berührungspole bilden.

Aus unserer Definition des „Kreises" folgt ferner, dass der Kegel-

schnitt $\varphi(xx) = 0$ des Büschels (I_1) $\varphi(xx) - \lambda\,\omega(xx) = 0$ (§ 50) dann einen Kreis vorstellt, wenn die Diskriminante für λ zwei gleiche Wurzeln liefert. Denn dann fallen die Geraden zweier zyklischen Paare zusammen.

52. Nun finden wir auch leicht die Gleichung eines *beliebigen sphärischen „Kreises"* in Punktkoordinaten. Sei der Wert λ_0 der Doppelwurzel von λ in (I_1) substituiert, so repräsentiert die Gleichung nur mehr eine doppelt gezählte Gerade. Angenommen, es sei dies die Gerade u_i, so haben wir demnach die Identität:

$$\varphi(xx) - \lambda_0\,\omega(xx) \equiv \varrho\,(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3)^2.$$

Setzen wir $\left|\frac{\lambda_0}{\varrho}\right| \equiv u^2$ (Konstante), so ist

$$\varphi(xx) \equiv (u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3)^2 + u^2\,\omega(xx) = 0$$

die gesuchte *„Kreis"-Gleichung.* Sie ist allgemein, weil die Gerade u_i willkürlich gewählt ist.[1]) Der absolute Pol der Geraden u_i ist „Kreiszentrum", weil in ihr die „zyklischen Geraden" zusammenfallen. Betrachtet man die Konstante u^2 als variabeln Parameter, so liefert die Gleichung die sämtlichen „Kreise" eines „konzyklischen" Büschels.

schnitt $\Psi(uu) = 0$ der Schaar (I_2) $\Psi(uu) - \lambda\,\Omega(uu) = 0$ (§ 50) dann einen Kreis vorstellt, wenn die Diskriminante für λ zwei gleiche Wurzeln liefert. Denn dann fallen die „Brennpunkte" zweier Paare zusammen.

Nun finden wir auch leicht die Gleichung eines *beliebigen sphärischen „Kreises"* in Linienkoordinaten. Sei der Wert λ_0 der Doppelwurzel von λ in (I_2) substituiert, so repräsentiert die Gleichung nur mehr einen doppelt gezählten Punkt. Angenommen, es sei dies der Punkt x_i, so haben wir demnach die Identität:

$$\Psi(uu) - \lambda_0\,\Omega(uu) \equiv \varrho\,(x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3)^2.$$

Setzen wir $\left|\frac{\lambda_0}{\varrho}\right| \equiv x^2$ (Konstante), so ist

$$\Psi(uu) \equiv (x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3)^2 + x^2\,\Omega(uu) = 0$$

die gesuchte *„Kreis"-Gleichung.* Sie ist allgemein, weil der Punkt x_i willkürlich gewählt ist.[1]) Der Punkt x_i ist sein „Zentrum", weil in ihm die „Brennpunkte" zusammenfallen. Betrachtet man die Konstante x^2 als variabeln Parameter, so liefert die Gleichung die sämtlichen „Kreise" einer „konfokalen" Schaar.

[1]) Von den Koeffizienten von $\varphi(xx)$, resp. $\Psi(uu)$, ist nämlich nur vorausgesetzt, dass sie die Gleichung (I) so befriedigen, dass dieselbe für den Parameter λ_0 in zwei lineare Faktoren zerfällt. Sie können also stets so gewählt werden, dass die „zyklischen" Geraden mit einer willkürlichen Geraden u_i, resp. die „Brennpunkte" mit einem willkürlichen Punkte x_i, zusammenfallen.

53. „Tripolar assoziierte" Punkte und Geraden.

Wie in der Einleitung bemerkt wurde, wird in der rein projektiven Geometrie die Entfernung zweier Punkte und dual dazu der Winkel zweier Geraden durch den Logarithmus des D. V. in Bezug auf den absoluten Kegelschnitt definiert. In einzelnen Fällen ist dies jedoch nicht bequem, so z. B. für die Behandlung der tripolaren Punkte. Wir dehnen daher das von Berkhan für die Ebene angewandte Prinzip [1]) auch auf die Kugel aus, und zwar in folgender Weise. Seien

$x_1R_1 + x_2R_2 + x_3R_3 \equiv \sqrt{\omega(xx)}\ r$ [2])
$y_1R_1 + y_2R_2 + y_3R_3 \equiv \sqrt{\omega(yy)}\ r'$
zwei willkürliche Punkte der Sphäre. Bilden wir nun das Quadrat ihres äusseren Produkts:

$$\omega\,(xx)\ \omega\,(yy)\ \left(Vrr'\right)^2 =$$
$$\left\{V(x_1R_1+x_2R_2+x_3R_3)(y_1R_1+\ldots.)\right\}^2$$
$$= \Omega_{11}(x_2y_2-x_3y_2)^2+\Omega_{22}(x_3y_1-x_1y_3)^2 + \Omega_{33}(x_1y_2-x_2y_1)^2$$
$$+\ 2\,\Omega_{12}\,(x_2y_3 - x_3y_2)\ (x_3y_1 - x_1y_3)$$
$$+\ 2\,\Omega_{23}\,(x_3y_1 - x_1y_3)\ (x_1y_2 - x_2y_1)$$
$$+\ 2\,\Omega_{31}\,(x_1y_2 - x_2y_1)\ (x_2y_3 - x_3y_2)$$
$$\equiv \Omega\,(x_2y_3 - x_3y_2\ ,\ x_3y_1 - x_1y_3\ ,\ x_1y_2 - x_2y_1).$$

Wir definieren nun den Wert $\left(Vrr'\right)^2$ als Quadrat der *sphärischen Entfernung der beiden Punkte*

„Trilateral assoziierte" Geraden und Punkte.

$u_1L_1 + u_2L_2 + u_3L_3 \equiv \sqrt{\Omega(uu)}\ l$ [2])
$v_1L_1 + v_2L_2 + v_3L_3 \equiv \sqrt{\Omega(vv)}\ l'$
zwei willkürliche sphärische Gerade. Bilden wir nun das Quadrat ihres äusseren Produkts:

$$\Omega\,(uu)\ \Omega\,(vv)\ \left(Vll'\right)^2 =$$
$$\left\{V(u_1L_1+u_2L_2+u_3L_3)(v_1L_1+\ldots.)\right\}^2$$
$$= \omega_{11}(u_2v_3-u_3v_2)^2+\omega_{22}(u_3v_1-u_1v_3)^2 + \omega_{33}(u_1v_2-u_2v_1)^2$$
$$+\ 2\,\omega_{12}\,(u_2v_3 - u_3v_2)\ (u_3v_1 - u_1v_3)$$
$$+\ 2\,\omega_{23}\,(u_3v_1 - u_1v_3)\ (u_1v_2 - u_2v_1)$$
$$+\ 2\,\omega_{31}\,(u_1v_2 - u_2v_1)\ (u_2v_3 - u_3v_2)$$
$$\equiv \omega\,(u_2v_3 - u_3v_2\ ,\ u_3v_1 - u_1v_3\ ,\ u_1v_2 - u_2v_1).$$

Wir definieren nun den Wert $\left(Vll'\right)^2$ als Quadrat des *Winkels der beiden sphärischen Geraden*

---

[1]) Berkhan versteht „unter dem Quadrat des Abstandes eines Punktes von einem zweiten den Wert, welchen für diesen die linke Seite der Gleichung seiner Kreisgeraden annimmt, wenn man statt der laufenden Koordinaten die des ersten Punktes einsetzt."

[2]) In der Theorie der Punktsymbole (§ 9) haben wir x_i die nicht reduzierten, hingegen $\frac{x_i}{\sqrt{\omega(xx)}}$ die reduzierten Koordinaten eines Punktes R genannt. Gaben wir ihm im ersteren Falle den grossen Buchstaben R als Symbol, so soll nun im letzteren Fall sein Symbol durch den kleinen Buchstaben r angedeutet sein, so dass also $R \equiv \sqrt{\omega\,(xx)}\ r \equiv x_i\ r$.

r und r′. Nehmen wir an Stelle von r′ die Ecken des Grunddreiecks, so bekommen wir für die Quadrate der Entfernungen des Punktes r von den Eckpunkten des Dreiecks:

$$\left(\mathrm{V\,r\,r_i}\right)^2 = \frac{\Omega\,(0, x_1, -x_k)}{\omega(xx)\,\omega_{ii}} = \frac{\Omega_{ii}\,x_k^2 - 2\,\Omega_{kl}\,x_k\,x_l + \Omega_{kk}\,x_l^2}{\omega\,(xx)\;\omega_{ii}} = \xi_i^2.$$

Die Werte ξ_i definieren wir als „*tripolare*“ Koordinaten des Punktes r.

Suchen wir jetzt den Punkt, dessen „tripolare“ Koordinaten ξ_i drei gegebenen Werten m_1, m_2, m_3 proportional sind.

Sind x_i die gewöhnlichen Koordinaten des gesuchten Punktes, so müssen sie der Proportion (I) genügen:

$$\text{(I)}\quad m_1 : m_2 : m_3 = \frac{\sqrt{\Omega\,(0, x_3, -x_2)}}{\mu_1} : \frac{\sqrt{\Omega\,(0, x_1, -x_3)}}{\mu_2} : \frac{\sqrt{\Omega\,(0, x_2, -x_1)}}{\mu_3}$$

$$\text{(II)}\quad n_1 : n_2 : n_3 = \frac{\sqrt{\omega\,(0, u_3, -u_2)}}{\nu_1} : \frac{\sqrt{\omega\,(0, u_1, -u_3)}}{\nu_2} : \frac{\sqrt{\omega(0, u_2, -u_1)}}{\nu_3}$$

oder

$$\varphi_i = \frac{\Omega\,(0, x_i, -x_l)}{m_k^2\;\omega_{kk}} - \frac{\Omega\,(0, x_k, -x_i)}{m_l^2\;\omega_{ll}} = 0.$$

Nun gibt es aber offenbar vier Wertsysteme x_i, welche den drei Gleichungen $\varphi_i = 0$ gleichzeitig genügen, denn die Kegelschnitte φ_i schneiden sich in vier gemeinsamen Punkten. In Bezug auf ein sphärisches Fundamentaldreieck gibt es demnach vier „tripolar assoziierte“ Punkte, welche in die gewöhnlichen der metrischen sphärischen Geometrie übergehen, wenn wir für den abso-

l und l′. Nehmen wir an Stelle von l′ die Seiten des Grunddreiseits, so bekommen wir für die Quadrate der Winkel, welche die Gerade l mit den Seiten des Dreiseits bildet:

$$\left(\mathrm{V\,l\,l_i}\right)^2 = \frac{\omega\,(0, u_l, -u_k)}{\Omega\,(uu)\;\Omega_{ii}} = \frac{\omega_{ll}\,u_k^2 - 2\,\omega_{kl}\,u_k\,u_l + \omega_{kk}\,u_l^2}{\Omega\,(uu)\;\Omega_{ii}} = \eta_i^2.$$

Die Werte η_i definieren wir als „*trilaterale*“ Koordinaten der Geraden l.

Suchen wir jetzt die Gerade, deren „trilaterale“ Koordinaten η_i drei gegebenen Werten n_1, n_2, n_3 proportional sind.

Sind u_i die gewöhnlichen Koordinaten der gesuchten Geraden, so müssen sie der Proportion (II) genügen:

oder

$$\psi_i = \frac{\omega\,(0, u_i, -u_l)}{n_k^2\;\Omega_{kk}} - \frac{\omega\,(0, u_k, -u_i)}{n_l^2\;\Omega_{ll}} = 0.$$

Nun gibt es aber offenbar vier Wertsysteme u_i, welche den drei Gleichungen $\psi_i = 0$ gleichzeitig genügen, denn die Kegelschnitte ψ_i berühren vier gemeinsame Tangenten. In Bezug auf ein sphärisches Fundamentaldreiseit gibt es demnach vier „trilateral assoziierte“ Gerade, welche in die gewöhnlichen der metrischen sphärischen Geometrie übergehen, wenn wir für den absoluten

luten Kegelschnitt die zyklische Kurve wählen.

Gibt es auch „tripolar assoziierte" *Geraden?*

Kegelschnitt die zyklische Kurve wählen.

Gibt es auch „trilateral assoziierte" *Punkte.*

Definieren wir in derselben Weise auch den sphärischen Abstand eines Punktes r von einer Geraden l, so kommt dies darauf hinaus, dass wir entweder die Gerade durch ihren absoluten Pol oder den Punkt r durch seine absolute Polare ersetzen und somit den Fall auf den vorhergehenden zurückführen. Definieren wir demnach

den Abstand zwischen Punkt und Gerade durch die Entfernung des Punktes von dem absoluten Pol der Geraden l (mit u_i als nicht reduzierte Koordinaten) und nehmen wir für den beliebigen Punkt wieder die Ecken des Grunddreiecks, so bekommen wir:

$$\left(V^{l}_{r_i}\right)^2 = \frac{\Omega[0, -\Omega'(u_l), \Omega'(u_k)]}{\omega_{ii}\,\omega[\Omega'(u_1), \Omega'(u_2), \Omega'(u_3)]}$$

$$= \frac{\Omega_{kk}\Omega'^2(u_l) - 2\Omega_{kl}\Omega'(u_k)\Omega'(u_l) + \Omega_{ll}\Omega'^2(u_k)}{\omega_{ii}\,\omega[\Omega'(u_1), \Omega'(u_2), \Omega'(u_3)]}$$

$$\equiv \xi_i^2.$$

Fragen wir wieder nach der Geraden, deren „tripolare" Koordinaten ξ_i drei gegebenen Werten m_1, m_2 m_3 proportional sind, so bestehen ähnliche Proportionen wie vorhin, denen die Koordinaten u_i genügen müssen, und daraus finden wir drei Klassenkegelschnitte mit vier gemeinsamen Tangenten, welch' letztere die gesuchten „tripolar assoziierten" Geraden sind.

den Abstand zwischen Gerade und Punkt durch den Winkel, den die Gerade mit der absoluten Polare des Punktes r (mit x_i als nicht reduzierte Koordinaten) einschliesst, und nehmen wir für die beliebige Gerade die Seiten des Grunddreiseits, so bekommen wir:

$$\left(V^{r}_{l_i}\right)^2 = \frac{\omega[0, -\omega'(x_l), \omega'(x_k)]}{\Omega_{ii}\,\Omega[\omega'(x_1), \omega'(x_2), \omega'(x_3)}$$

$$= \frac{\omega_{kk}\omega'^2(x_l) - 2\omega_{kl}\omega'(x_k)\omega'(x_l) + \omega_{ll}\omega}{\Omega_{ii}\,\Omega[\omega'(x_1), \omega'(x_2), \omega'(x_3)]}$$

$$\equiv \eta_i^2.$$

Fragen wir wieder nach dem Punkt, dessen „trilaterale" Koordinaten η_i drei gegebenen Werten n_1, n_2, n_3 proportional sind, so bestehen ähnliche Proportionen wie vorhin, denen die Koordinaten x_i zu genügen haben, und daraus finden wir drei Ordnungskegelschnitte mit vier gemeinsamen Schnittpunkten, welch' letztere die gesuchten „trilateral assoziierten" Punkte sind.

Zu einem anderen Ergebnis kommen wir aber, wenn wir den sphärischen Abstand zwischen Punkt und Geraden, statt durch das äussere Produkt wie soeben, durch das innere definieren. Denn dann haben wir:

$$(lr)^2 = \frac{u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3}{\omega(xx)\;\Omega(uu)}$$

$$(\mathrm{l}\,r_i)^2 = \frac{u_i^2}{\omega_{ii}\,\Omega\,(uu)} \equiv \varrho_i^2.$$

Ietzt werden die Gleichungen linear:

$$T_i \equiv \frac{u_k}{m_k\,\mu_k} - \frac{u_l}{m_l\,\mu_l} = 0.$$

Die drei Punkte T_i liegen auf einer Geraden, denn die Summe ihrer Gleichungen ist identisch Null. Diese Gerade ist demnach die einzige, deren „tripolare" Koordinaten ϱ_i drei gegebenen Werten proportional sind. Die metrische Interpretation der hier geltenden Beziehung

$$u_1 : u_2 : u_3 = \mu_1 \varrho_1 : \mu_2 \varrho_2 : \mu_3 \varrho_3$$

liefert die bekannte geometrische Bedeutung der sphärischen projektiven Linienkoordinaten.[1])

$$(\mathrm{r}\,l_i)^2 = \frac{x_i^2}{\Omega_{ii}\,\omega\,(xx)} \equiv \sigma_i^2.$$

Ietzt werden die Gleichungen linear:

$$t_i = \frac{x_k}{n_k\,\nu_k} - \frac{x_l}{n_l\,\nu_l} = 0.$$

Die drei Geraden t_i schneiden sich in einem Punkte, denn die Summe ihrer Gleichungen ist identisch Null. Dieser Schnittpunkt ist demnach der einzige Punkt, dessen „trilaterale" Koordinaten σ_i drei gegebenen Werten proportional sind. Die metrische Interpretation der hier geltenden Beziehung

$$x_1 : x_2 : x_3 = \nu_1 \sigma_1 : \nu_2 \sigma_2 : \nu_3 \sigma_3$$

liefert die bekannte geometrische Bedeutung der sphärischen projektiven Punktkoordinaten.[1])

Verallgemeinerung von Sätzen aus der affinen Geometrie.

54. Schon in § 43 wurde eine Verallgemeinerung des Schwerpunktes und seiner trilinearen Polare gegeben. Davon ausgehend hätte man auch die Sätze der affinen Geometrie behandeln können. Damit wären dieselben der elliptisch-hyperbolischen Geometrie eingeordnet worden, weil die Koordinaten der absoluten Geraden (μ_i) von den Koeffizienten des absoluten Kegelschnitts abhängen. Aber wie schon damals bemerkt wurde, lässt sich eine noch weitergehende Verallgemeinerung dadurch erzielen, dass wir nicht mehr die bestimmte spezielle Gerade μ_i, sondern mit Berkhan eine ganz beliebige Gerade als absolute Gerade fest wählen und daraus die sich daran knüpfenden Beziehungen ableiten. Für die Kugel können wir zwei Wege einschlagen, entweder richten wir den absoluten Kegelschnitt nach der gewählten absoluten Geraden ein, indem wir die Koeffizienten der rein quadratischen Glieder seiner Ordnungsgleichung den Quadraten der Koeffizienten der absoluten Geraden proportional nehmen, oder wir lassen den absoluten Kegelschnitt sowohl als die absolute Gerade von einander ganz unabhängig,

[1]) Siehe M.-Fr. Daniels, Essai de géométrie sphérique, S. 32.

wobei nur die Forderung besteht, dass die absolute Diskriminante Ω nicht verschwinde. Im ersteren Fall würde dann den Sätzen der elliptisch-hyperbolischen Geometrie insofern nicht mehr ein ganz willkürlicher Kegelschnitt zu Grunde liegen, als ein Teil seiner Koeffizienten von der Wahl der absoluten Geraden abhinge. Denken wir uns in §§ 43 ff. die absolute Gerade als das ursprünglich gegebene Gebilde, so sind dort bereits einige diesbezügliche Beispiele behandelt worden. Im zweiten Fall, wo absolute Gerade und absoluter Kegelschnitt unabhängig neben einander bestehen, müssen wir uns auf die sphärische Verallgemeinerung der Sätze der affinen Geometrie beschränken. Der absolute Kegelschnitt spielt dabei nur mehr eine Hilfsrolle, um nämlich auch hier die Punktsymbole verwenden zu können. Im Folgenden beschäftigen wir uns nur mit der zweiten Annahme.

55. Als *absolute Gerade* wählen wir willkürlich die sphärische Gerade:

$$g \equiv g_1 L_1 + g_2 L_2 + g_3 L_3 .$$

Ihren trilinearen Pol heissen wir wieder „*Schwerpunkt*“:

$$G \equiv \frac{R_1}{g_1} + \frac{R_2}{g_2} + \frac{R_3}{g_3} .$$

Seine Projektionen aus den Ecken auf die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks nennen wir die „*Seitenmitten*“:

$$G_i \equiv \frac{R_k}{g_k} + \frac{R_l}{g_l} .$$

Diese sind mit den „*Richtpunkten*“

$$K_i \equiv \frac{R_k}{g_k} - \frac{R_l}{g_l}$$

der Dreieckseiten harmonisch konjugiert in Bezug auf die Ecken R_k und R_l. Entsprechend bekommen

Als *absoluten Punkt* wählen wir willkürlich den Punkt der Sphäre:

$$\Gamma \equiv \gamma_1 R_1 + \gamma_2 R_2 + \gamma_3 R_3 .$$

Seine trilineare Polare ist die Gerade:

$$\gamma \equiv \frac{L_1}{\gamma_1} + \frac{L_2}{\gamma_2} + \frac{L_3}{\gamma_3} .$$

Die Verbindungsgeraden ihrer Seitenpunkte[1]) mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiseits nennen wir die „*Winkelhalbierenden*“:

$$w_i \equiv \frac{L_k}{\gamma_k} + \frac{L_l}{\gamma_l} .$$

Diese sind mit den „*Richtgeraden*“[2])

$$k_i \equiv \frac{L_k}{\gamma_k} - \frac{L_l}{\gamma_l}$$

der Eckpunkte harmonisch konjugiert in Bezug auf die Seiten L_k und L_l. Entsprechend bekommen

[1]) Einer Ecktransversalen entspricht dual ein Punkt auf der entsprechenden Dreieckseite; nennen wir denselben kurz *Seitenpunkt*.

[2]) Den zum „Richtpunkt“ einer Geraden dualen Begriff wollen wir als „Richtgerade“ eines Punktes bezeichnen und verstehen darunter die Verbindungsgerade des Punktes mit dem absoluten Punkt Γ.

wir jetzt als „*Medianen*“:

$$(G_i R_i) \equiv g_k L_k - g_l L_l .$$

Unter „*Mitte*“ *eines Bogens* verstehen wir demnach hier den in Bezug auf die Bogenendpunkte mit dem „Richtpunkt“ harmonisch konjugierten Punkt. Wir sprechen darum hier nicht mehr von *zwei* „Mitten“.

wir jetzt als Seitenpunkte der „Winkelhalbierenden“:

$$(w_i L_i) \equiv \gamma_k R_k - \gamma_l R_l .$$

Unter „*Halbierenden*“ *eines Winkels* verstehen wir demnach hier die in Bezug auf die Schenkel des Winkels mit der „Richtgeraden“ des Scheitels harmonisch konjugierte Gerade. Wir sprechen darum hier nicht mehr von *zwei* „Winkelhalbierenden“.

Wir beweisen nun folgende Sätze:

56. Zieht man durch die „Mitte“ einer beliebigen Ecktransversale des Grunddreiecks die übrigen Ecktransversalen, so liegen ihre „Mitten“ und der „Schwerpunkt“ in einer Geraden.

Beweis. Zu einem willkürlichen Punkt $P(x_i)$ gehört als erste Ecktransversale die Gerade

$$p_1 \equiv x_3 L_2 - x_2 L_3$$

und als entsprechender Seitenpunkt

$$P_1 \equiv x_2 R_2 + x_3 R_3 .$$

Folglich ist

$$N_1 \equiv R_1 - \lambda P_1$$

der „Richtpunkt“ und

$$M_1 \equiv R_1 + \lambda P_1$$

die „Mitte“ von p_1. Der Parameter λ lässt sich sehr leicht bestimmen, da das innere Produkt von N_1 mit g Null sein muss:

Die zu den Fusspunkten der „Bissectrix“ eines beliebigen Seitenpunkts[1]) gehörenden „Winkelhalbierenden“ gehen mit der Geraden γ durch einen Punkt.

Zu einer willkürlichen Geraden $p(u_i)$ gehört als erster Seitenpunkt

$$P_1 \equiv u_3 R_2 - u_2 R_3$$

und als entsprechende Scheitelgerade

$$p_1 \equiv u_2 L_2 + u_3 L_3 .$$

Folglich ist

$$n_1 \equiv L_1 - \lambda p_1$$

die „Richtgerade“ und

$$m_1 \equiv L_1 + \lambda p_1$$

die „Bissectrix“ zu P_1. Der Parameter λ lässt sich sehr leicht bestimmen, da das innere Produkt von n_1 mit I' Null sein muss:

[1]) Wird ein Seitenpunkt mit der gegenüberliegenden Ecke durch eine Gerade verbunden, so bildet die letztere mit der Dreieckseite, welcher der Seitenpunkt angehört, zwei Winkel. Den einen „halbiert“ die „Richtgerade“ des Seitenpunkts, den andern zum ersteren supplementären Winkel „halbiert“ die zur „Richtgeraden“ harmonisch konjugierte Gerade. Diese wollen wir kurzweg als „Winkelhalbierende“ oder „Bissectrix“ des Seitenpunkts bezeichnen.

$$\lambda = \frac{g_1}{g_2 x_2 + g_3 x_3}.$$

Als „Mitten" der durch M_1 gehenden weiteren Ecktransversalen $p_2' \equiv \mathsf{V} R_2 M_1$ und $p_3' \equiv \mathsf{V} R_3 M_1$ finden wir demnach:

$$M_2' \equiv \frac{g_2 x_2 + g_3 x_3}{g_1} R_1 + \frac{g_2 x_2 + 2 g_3 x_3}{g_2} R_2 + x_3 R_3$$

$$M_3' \equiv \frac{g_2 x_2 + g_3 x_3}{g_1} R_1 + x_2 R_2 + \frac{2 g_2 x_2 + g_3 x_3}{g_3} R_3.$$

Jetzt wird das innere Produkt

$$G \mathsf{V} M_2' M_3' = 0.$$

Ebenso finden wir, wenn wir von der zweiten oder dritten Ecktransversalen von P ausgehen, dass

$$G \mathsf{V} M_3' M_1' = 0 \text{ und}$$

$$G \mathsf{V} M_1' M_2' = 0.$$

57. **Satz von Newton.** Die „Mitten" der Diagonalen des vollständigen Vierecks liegen in einer Geraden.

$$\lambda = \frac{\gamma_1}{\gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3}.$$

Als „Winkelhalbierende" der auf m_1 liegenden weiteren Seitenpunkte $P_2' \equiv \mathsf{V} L_2 m_1$ und $P_3' \equiv \mathsf{V} L_3 m_1$ finden wir demnach:

$$m_2' \equiv \frac{\gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3}{\gamma_1} L_1 + \frac{\gamma_2 u_2 + 2 \gamma_3 u_3}{\gamma_2} L_2 + u_3 L_3$$

$$m_3' \equiv \frac{\gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3}{\gamma_1} L_1 + u_2 L_2 + \frac{2 \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3}{\gamma_3} L_3.$$

Jetzt wird das innere Produkt

$$\gamma \mathsf{V} m_2' m_3' = 0.$$

Ebenso finden wir, wenn wir vom zweiten oder dritten Seitenpunkt der Geraden p ausgehen, dass

$$\gamma \mathsf{V} m_3' m_1' = 0 \text{ und}$$

$$\gamma \mathsf{V} m_1' m_2' = 0.$$

Die „Winkelhalbierenden" der Fusspunkte einer willkürlichen Geraden schneiden sich in einem Punkt.

Seien $R_1, R_2, R_3, R\,(x_i)$ die vier Eckpunkte, dann sind die Fusspunkte P_i der zu R gehörenden Scheitelgeraden die Diagonalpunkte:

$$P_1 \equiv x_k R_k + x_1 R_1.$$

Da die „Mitten" der Diagonalen $R_2 R_3$, $P_1 R$, $P_2 P_3$ mit den entsprechenden „Richtpunkten" konjugiert sein müssen, so finden wir für sie:

$$\frac{R_2}{g_2} + \frac{R_3}{g_3}, \quad \frac{R_1}{g_1} + \frac{R}{\Sigma g_i x_i}, \quad (g_1 x_1 + g_2 x_2) P_2 + (g_3 x_3 + g_1 x_1) P_3.$$

Weil das innere Produkt dieser drei Punkte Null ist, so liegen sie auf einer Geraden. Damit ist der links stehende Satz bewiesen.

58. Ans vollständige Viereck resp. Vierseits knüpft sich auch der folgende Satz:

Die „Mitten“ der Ecktransversalen eines beliebigen Punktes R (x_i) werden mit den entsprechenden „Seitenmitten“ durch Gerade verbunden, welche sich in einem Punkte schneiden.

Die „Winkelhalbierenden“, welche zu den Seitenpunkten einer beliebigen Geraden L (u_i) gehören, besitzen mit den „Bissectrices“ der entsprechenden Winkel des Grunddreiseits Schnittpunkte, die auf einer Geraden liegen.

Für die „Mitten“ M_i der Ecktransversalen ($R_i P_i$) finden wir wieder die Symbole:

$$M_1 \equiv \frac{g_k x_k + g_l x_l}{g_i} R_i + x_k R_k + x_l R_l.$$

Da das innere Produkt der drei Verbindungsgeraden $G_i M_i$ Null wird, so gehen sie durch einen Punkt:

$$R' \equiv x_1 (g_2 x_2 + g_3 x_3) R_1 + x_2 (g_3 x_3 + g_1 x_1) R_2 + x_3 (g_1 x_1 + g_2 x_2) R_3.$$

Diesen Schnittpunkt finden wir auch leicht durch folgende auf der „komplementisotomen“ Verwandtschaft beruhende Konstruktion. Wir projizieren den Punkt R aus den Ecken R_i auf die Seiten $G_k G_l$ des „Mittendreiecks“ und die so erhaltenen Punkte aus den „Seitenmitten“ G_i in den Punkt R′.

Beweis. Da die Projektion von R auf $G_2 G_3$ der ersten Ecktransversalen angehört, so hat sie das Symbol

$$P_1' \equiv z_1 R_1 + x_2 R_2 + x_3 R_3$$

wo die einzige Unbekannte z_1 aus der Bedingung bestimmt werden kann, dass $P_1 G_2 G_3$ in einer Geraden liegen. Daher ist

$$\begin{vmatrix} z_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{1}{g_1} & 0 & \frac{1}{g_3} \\ \frac{1}{g_1} & \frac{1}{g_2} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

folglich ist

$$g_1 z_1 = g_2 x_2 + g_3 x_3, \quad \text{und} \quad P_1 = \frac{g_2 x_2 + g_3 x_3}{g_1} R_1 + x_2 R_2 + x_3 R_3.$$

Dieser Punkt ist offenbar identisch mit M_1, der „Mitte“ der ersten Ecktransversalen.

Ersetzen wir den Punkt R durch eine beliebige Gerade L und bringen die Ecktransversalen ihrer Sei-

Ersetzen wir die Gerade L durch einen beliebigen Punkt R und verbinden die Seitenpunkte seiner Eck-

tenpunkte mit den entsprechenden Seiten ($G_k G_l$) des „Mittendreiecks“ zum Schnitt, so liegen die drei Schnittpunkte in einer neuen Geraden L′, welche durch die „Mitten“ der Diagonalen des vollständigen Vierecks geht.

Diese Gerade — *Gerade von Gauss* — ist demnach identisch mit derjenigen in § 57. Zwischen L und L′ besteht „komplementisotome“ Verwandtschaft.

transversalen mit den entsprechenden Ecken ($w_k w_l$) des „Winkelhalbierenden-Dreiseits“, so gehen die drei Verbindungsgeraden durch einen neuen Punkt R′, in dem sich die „Winkelhalbierenden“ der Seitenpunkte der vierten Geraden des vollständigen Vierseits schneiden.

Dieser Punkt ist demnach identisch mit demjenigen in § 57. Zwischen R und R′ besteht „komplementisogonale“ Verwandtschaft.

Beweis und Konstruktion ähnlich wie vorhin.

59. Es gehen ferner durch einen Punkt die Verbindungsgeraden der „Seitenmitten“ mit denjenigen Punkten Q_i der Ecktransversalen eines beliebigen Punktes R (x_i), welche mit den betreffenden „Richtpunkten“ in Bezug auf R_i und R demselben D. V. entsprechen.

Es liegen ferner auf einer Geraden die Schnittpunkte der „Winkelhalbierenden“ und derjenigen Geraden q_i der Strahlenbüschel in den Seitenpunkten einer beliebigen Geraden L (u_i), welche mit den betreffenden „Richtgeraden“ in Bezug auf L_i und L demselben D. V. entsprechen.

Offenbar sind die Punkte Q_i darstellbar durch

$$Q_i \equiv R_i - \lambda_i R$$

und die „Richtpunkte“ der Ecktransversalen des Punktes R durch

$$N_i \equiv R_i - \lambda_i' R.$$

Folglich ist das D. V. $= \frac{\lambda_i}{\lambda_i'} \equiv \mu$, oder $\lambda_i = \lambda_i' \mu$. Durch innere Multiplikation von N_i mit der absoluten Geraden findet man für

$$\lambda_i' = \frac{g_i}{\Sigma g_i x_i}$$

Demnach sind die Geraden

$$(Q_i G_i) \equiv \mu(g_k x_k - g_i x_i) g_i L_i + (\Sigma g_i x_i - \mu g_i x_i) g_k L_k - (\Sigma g_i x_i - \mu g_i x_i) g_i L_i.$$

Da die Determinante der Koordinaten dieser drei Geraden Null wird, was auch μ sein mag, so schneiden sie sich in der Tat in einem Punkte. Für $\mu = -1$ wird Q_i zur „Mitte“ des Bogens $R_i R$.

60. Die „Seitenmitten“ G_i, die „Mitten“ Q_i der Bogen $R_i R$ und die Fusspunkte P_i der Ecktransversalen von $R(y_i)$ liegen auf einem Kegelschnitt.

Die 6 Punkte

$$G_i \equiv \frac{R_k}{g_k} + \frac{R_l}{g_l}\,; \quad P_i \equiv y_k R_k + y_l R_l$$

genügen offenbar dem Satz von Carnot und gehören dem Kegelschnitte an:

$$\begin{aligned} &g_1 y_2 y_3 x_1^2 + g_2 y_3 y_1 x_2^2 + g_3 y_1 y_2 x_3^2 \\ &- (g_1 y_1 + g_2 y_2)\, y_3 x_1 x_2 \\ &- (g_2 y_2 + g_3 y_3)\, y_1 x_2 x_3 \\ &- (g_3 y_3 + g_1 y_1)\, y_2 x_3 x_1 = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung befriedigen aber auch die Koordinaten der „Mitten“

$$Q_i \equiv \frac{g_i y_i + g_k y_k + g_l y_l}{g_i} R_i + y_k R_k + y_l R_l.$$

Die „Winkelhalbierenden“ w_i des Grunddreiseits, die „Halbierenden“ q_i der Winkel $L_i L$ und die Scheitelgeraden p_i der Seitenpunkte von $L(v_i)$ umhüllen einen Kegelschnitt.

Die 6 Geraden

$$w_i \equiv \frac{L_k}{\gamma_k} + \frac{L_l}{\gamma_l}\,; \quad p_i \equiv v_k L_k + v_l L_l$$

genügen offenbar dem Satz von Carnot und sind Tangenten des Kegelschnitts:

$$\begin{aligned} &\gamma_1 v_2 v_3 u_1^2 + \gamma_2 v_3 v_1 u_2^2 + \gamma_3 v_1 v_2 u_3^2 \\ &- (\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2)\, v_3 u_1 u_2 \\ &- (\gamma_2 v_2 + \gamma_3 v_3)\, v_1 u_2 u_3 \\ &- (\gamma_3 v_3 + \gamma_1 v_1)\, v_2 u_3 u_1 = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung befriedigen aber auch die Koordinaten der „Winkelhalbierenden“

$$q_i \equiv \frac{2\gamma_i v_i + \gamma_k v_k + \gamma_l v_l}{\gamma_i} L_i + v_k L_k + v_l L_l.$$

Nehmen wir als absolute Gerade die Gerade (μ_i) (§ 43) und für R das „Orthozentrum“ $H\left(\frac{1}{\Omega_{kl}}\right)$, so bekommen wir als Kegelschnitt den *„Kreis von Feuerbach“*:

$$+\mu_2\Omega_{31}x_2^2 + \mu_3\Omega_{12}x_3^2 - (\mu_1\Omega_{31} + \mu_2\Omega_{23})x_1x_2 - (\mu_2\Omega_{12} + \mu_3\Omega_{31})x_2x_3 - (\mu_3\Omega_{23} + \mu_1\Omega_{12})x_3x_1 = 0.$$

61. Durch einen beliebigen Punkt P ziehen wir die Ecktransversalen und zu denselben die durch die Ecken $R_k R_l R_i$ und $R_l R_i R_k$ des Grunddreiecks gehenden „Parallelen“. Unter welcher Bedingung schneiden sich die letzteren in einem Punkte?

Ist

$$P \equiv x_1 R_1 + x_2 R_2 + x_3 R_3,$$

so sind

$$p_i \equiv \frac{L_k}{x_k} - \frac{L_l}{x_l}$$

Durch die Seitenpunkte einer beliebigen Geraden p ziehen wir die „Richtgeraden“. Unter welcher Bedingung liegen die Seitenpunkte der letzteren auf einer Geraden?

Ist

$$p \equiv u_1 L_1 + u_2 L_2 + u_3 L_3,$$

so sind

$$P_i \equiv \frac{R_k}{u_k} - \frac{R_l}{u_l}$$

seine Ecktransversalen und

$$p_i' \equiv p_i - \lambda_i \Sigma g_i L_i$$

die „Parallelen" der letzteren. Da die p_i' durch die Ecken des Dreiecks gehen müssen, so finden wir als Wertetripel für die Parameter:

$$\lambda_i = \frac{x_i}{g_k} \quad \text{und} \quad \lambda_i' = -\frac{x_k}{g_i}.$$

Soll sich nun das erste „Parallelentripel" in einem Punkte schneiden, so müssen die Koordinaten x_i von P folgender Determinantengleichung (I) genügen:

ihre Seitenpunkte und

$$P_i' \equiv P_i - \lambda_i \Sigma \gamma_i R_i$$

die „Richtgeradenpunkte". Da die P_i' auf den Dreieckseiten liegen müssen, so finden wir als Wertetripel für die Parameter:

$$\lambda_i = \frac{u_i}{\gamma_k} \quad \text{und} \quad \lambda_i' = -\frac{u_k}{\gamma_i}.$$

Soll nun das erste Punkttripel auf einer Geraden liegen, so müssen die Koordinaten u_i von p folgender Determinantengleichung (II) genügen:

$$(I) \quad \begin{vmatrix} -g_1x_3 & 0 & -(g_2x_2+g_3x_3) \\ -(g_3x_3+g_1x_1) & -g_2x_1 & 0 \\ 0 & -(g_1x_1+g_2x_2) & -g_3x_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\equiv (g_1x_1 + g_2x_2 + g_3x_3)(g_1g_2x_1x_2 + g_2g_3x_2x_3 + g_3g_1x_3x_1) = 0.$$

$$(II) \quad \begin{vmatrix} -\gamma_1u_3 & 0 & -(\gamma_2u_2+\gamma_3u_3) \\ -(\gamma_3u_3+\gamma_1u_1) & -\gamma_2u_1 & 0 \\ 0 & -(\gamma_1u_1+\gamma_2u_2) & -\gamma_3u_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\equiv (\gamma_1u_1 + \gamma_2u_2 + \gamma_3u_3)(\gamma_1\gamma_2u_1u_2 + \gamma_2\gamma_3u_2u_3 + \gamma_3\gamma_1u_3u_1) = 0.$$

Genau dieselbe Bedingung erhalten wir auch für das zweite „Parallelentripel". Der Punkt P muss demnach entweder auf der absoluten Geraden oder auf der *„Steiner'schen Umellipse"* gewählt werden.

Genau dieselbe Bedingung erhalten wir auch für das zweite Punkttripel. Die Gerade p muss demnach entweder durch den absoluten Punkt gehen oder den Inkegelschnitt $\frac{u_k u_l}{\gamma_i} = 0$ berühren.

62. Welcher Bedingung muss der Punkt P (x_i) genügen, wenn die Seitenpunkte der durch P zu den Seiten eines andern Dreiecks A_i' gezogenen „Parallelen" jeweils in einer Geraden liegen sollen?

Welcher Bedingung muss die Gerade p (u_i) genügen, wenn die Ecktransversalen, welche zu den Schnittpunkten von p mit den „Richtgeraden" der Ecken eines andern Dreiseits gehören, jeweils durch einen Punkt gehen sollen?

Lösen wir die links stehende Aufgabe. Die Seiten des Dreiecks A_i' seien gebildet durch die willkürlichen Geraden:

$$m_1 \equiv u_1L_1 + u_2L_2 + u_3L_3,$$
$$m_2 \equiv v_1L_1 + v_2L_2 + v_3L_3, \quad m_3 \equiv w_1L_1 + w_2L_2 + w_3L_3.$$

Dann sind die durch den Punkt P (x_i) gehenden „Parallelen“:

$$q_1 \equiv g(x)L_1 - u(x)\Sigma g_iL_i,$$
$$q_2 \equiv g(x)L_2 - v(x)\Sigma g_iL_i, \quad q_3 \equiv g(x)L_3 - w(x)\Sigma g_iL_i.$$

Diese liefern mit den Seiten des Grunddreiecks drei Schnittpunkttripel[1]):

$$Q_i^i \equiv [g(x)u_1 - u(x)g_1]\ R_k - [g(x)u_k - u(x)g_k]\ R_1$$
$$Q_i^k \equiv [g(x)u_i - u(x)g_i]\ R_1 - [g(x)u_1 - u(x)g_1]\ R_i$$
$$Q_i^1 \equiv [g(x)u_k - u(x)g_k]\ R_i - [g(x)u_i - u(x)g_i]\ R_k$$

Soll nun das erste Punkttripel, Q_i^i, auf einer Geraden liegen, so muss offenbar die folgende Determinante Null sein:

$$\begin{vmatrix} 0 & g(x)u_3 - u(x)g_3 & -[g(x)u_2 - u(x)g_2 \\ -[g(x)v_3 - v(x)g_3] & 0 & g(x)v_1 - v(x)g_1 \\ g(x)w_2 - w(x)g_2 & -[g(x)w_1 - w(x)g_1] & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$C \equiv [g(x)u_3 - u(x)g_3]\,[g(x)v_1 - v(x)g_1]\,[g(x)w_2 - w(x)g_2]$$
$$- [g(x)u_2 - u(x)g_2]\,[g(x)v_3 - v(x)g_3]\,[g(x)w_1 - w(x)g_1] = 0.$$

Da sich $g(x)$ als gemeinsamer Faktor absondern lässt, so zerfällt der geometrische Ort des Punktes P in die absolute Gerade und in einen Umkegelschnitt.

Um die Enveloppe der Verbindungsgeraden der Punkte Q_i^i zu finden, suchen wir den geometrischen Ort einer Geraden $u'(x) = 0$, welche das Grunddreieck in drei Punkten schneidet. Durch die letzteren ziehen wir die entsprechenden „Parallelen“ zu den Seiten m_i des Dreiecks A_i'. Diese drei „Parallelen“ schneiden sich in einem Punkte P, wenn

$$\begin{vmatrix} -u_3g_1)u_2' + (u_2g_1 - u_1g_2)u_3' & (u_2g_3 - u_3g_2)u_2' & (u_2g_3 - u_3g_2)u_3' \\ (v_3g_1 - v_1g_3)u_1' & (v_2g_1 - v_1g_2)u_3' + (v_3g_2 - v_2g_3)u_1' & (v_3g_1 - v_1g_3)u_3' \\ (w_1g_2 - w_2g_1)u_1' & (w_1g_2 - w_2g_1)u_2' & (w_3g_2 - w_2g_3)u_1' + (w_1g_3 - w_3g_1)u_2' \end{vmatrix}$$
$$= 0.$$

Die Form dieser Gleichung sagt uns, dass die Enveloppe eine Kurve dritter Klasse und zwar eine „*Steiner'sche Hypozykloide*“ ist, welche die absolute Gerade als Doppeltangente besitzt.

---

[1]) Jn den Symbolen Q_i^i, Q_i^k, Q_i^1 sind nicht bloss die Buchstaben i, k, l zu permutieren, sondern auch u im Zyklus u, v, w. — Die Abkürzung $g(x) \equiv g_1x_1 + g_2x_2 + g_3x_3$; ähnlich $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$.

Soll das zweite Punkttripel Q_i^k auf einer Geraden liegen, so finden wir als Bedingung:

$$C' \equiv [g(x)u_1 - u(x)g_1]\,[g(x)v_2 - v(x)g_2]\,[g(x)w_3 - w(x)g_3] - [g(x)u_3 - u(x)g_3]\,[g(x)v_1 - v(x)g_1]\,[g(x)w_2 - w(x)g_2] = 0.$$

Und für das dritte Punkttripel Q_i^l:

$$C'' \equiv [g(x)u_2 - u(x)g_2]\,[g(x)v_3 - v(x)g_3]\,[g(x)w_1 - w(x)g_1] - [g(x)u_1 - u(x)g_1]\,[g(x)v_2 - v(x)g_2]\,[g(x)w_3 - w(x)g_3] = 0.$$

Die Kurven C′ und C″ zerfallen ebenfalls in die absolute Gerade und einen Umkegelschnitt. Da zwischen diesen Kurven die Beziehung

$$C \equiv C' + C''$$

besteht, so schneiden sich die drei Umkegelschnitte ausser in den drei Ecken des Grunddreiecks noch in einem vierten Punkte, für welchen die drei Schnittpunkttripel Q_i^i, Q_i^k, Q_i^l gleichzeitig auf je einer Geraden liegen.

63. **„Brocard'sche Punkte".** Durch die Fusspunkte der Ecktransversalen eines beliebigen Punktes $P(x_i)$ ziehen wir die „Parallelen" zu den Dreieckseiten $L_2L_3L_1$ und $L_3L_1L_2$. Dadurch finden wir die Fusspunkte der Ecktransversalen zweier neuen Punkte

$$Q\left(\frac{g_1}{x_k}\right) \text{ und } Q'\left(\frac{g_k}{x_1}\right).$$

Auf den Ecktransversalen der Seitenpunkte einer beliebigen Geraden $p(u_i)$ nehmen wir die Punkte, welche mit den Ecken $R_2R_3R_1$ und $R_3R_1R_2$ des Grunddreiseits derselben „Richtgeraden" angehören. Dadurch finden wir die Ecktransversalen der Seitenpunkte von zwei neuen Geraden

$$q\left(\frac{\gamma_1}{u_k}\right) \text{ und } q'\left(\frac{\gamma_k}{u_1}\right).$$

Die „Parallele" durch den Fusspunkt der ersten Scheitelgeraden von P ist offenbar

$$p_2 \equiv \Sigma g_i L_i + \lambda L_2 = g_1 L_1 - \frac{g_3 x_3}{x_2} L_2 + g_3 L_3,$$

und ihr Schnittpunkt mit der dritten Dreieckseite

$$Q_3 \equiv \frac{g_3 x_3}{g_1} R_1 + x_2 R_2.$$

Die zyklische Vertauschung der Indizes liefert direkt Q_1 und Q_2. Aus den Symbolen der Punkte Q_i sehen wir unmittelbar, dass sie die Fusspunkte der Ecktransversalen sind, welche sich in dem Punkte

$$Q \equiv \frac{g_3}{x_2} R_1 + \frac{g_1}{x_3} R_2 + \frac{g_2}{x_1} R_3$$

schneiden.

Und ähnlich finden wir durch Ziehung der „Parallelen“ zu $L_3 L_1 L_2$:

$$Q' \equiv \frac{g_2}{x_3} R_1 + \frac{g_3}{x_1} R_2 + \frac{g_1}{x_2} R_3.$$

Ersetzen wir P durch Q und wiederholen dasselbe Verfahren, so bekommen wir den Punkt:

$$Q'' \equiv \frac{g_3 x_3}{g_1} R_1 + \frac{g_1 x_1}{g_2} R_2 + \frac{g_2 x_2}{g_3} R_3.$$

Wiederholen wir nun mit Q″ dasselbe und fahren wir in dieser Weise fort, so bekommen wir eine Gruppe von 6 Punkten:

$$(x_1, x_2, x_3), \left(\frac{g_3}{x_2}, \frac{g_1}{x_3}, \frac{g_2}{x_1}\right), \left(\frac{g_3}{g_1} x_3, \frac{g_1}{g_2} x_1, \frac{g_2}{g_3} x_2\right),$$

$$\left(\frac{1}{g_1^2 x_1}, \frac{1}{g_2^2 x_2}, \frac{1}{g_3^2 x_3}\right), \left(\frac{g_2}{g_1} x_2, \frac{g_3}{g_2} x_3, \frac{g_1}{g_3} x_1\right), \left(\frac{g_2}{x_3}, \frac{g_3}{x_1}, \frac{g_1}{x_2}\right).$$

Der nun folgende siebente Punkt fällt wieder mit dem ersten zusammen, u. s. w. Ersetzen wir endlich P durch Q′ und wiederholen die nämliche Entwicklung, so bekommen wir dieselbe Punktgruppe wie vorhin, nur in umgekehrter Reihenfolge. Zwischen dem ersten und vierten, dem zweiten und fünften, dem dritten und sechsten Punkt der Gruppe besteht die Beziehung

$$x_i y_i = \frac{1}{g_i^2},$$

also „isotome“ Verwandtschaft.

Nehmen wir für P den Punkt von „Lemoine“, so finden wir für Q und Q′ die beiden Punkte von „Brocard“: Ω′ und Ω.

Dual ergibt sich eine Gruppe von 6 Geraden:

$$(u_1, u_2, u_3), \left(\frac{\gamma_3}{u_2}, \frac{\gamma_1}{u_3}, \frac{\gamma_2}{u_1}\right), \left(\frac{\gamma_3}{\gamma_1} u_3, \frac{\gamma_1}{\gamma_2} u_1, \frac{\gamma_2}{\gamma_3} u_2\right),$$

$$\left(\frac{1}{\gamma_1^2 u_1}, \frac{1}{\gamma_2^2 u_2}, \frac{1}{\gamma_3^2 u_3}\right), \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} u_2, \frac{\gamma_3}{\gamma_2} u_3, \frac{\gamma_1}{\gamma_3} u_1\right), \left(\frac{\gamma_2}{u_3}, \frac{\gamma_3}{u_1}, \frac{\gamma_1}{u_2}\right)$$

und die auftretende Verwandschaft ist „isogonal“.

Vita.

Der Verfasser vorliegender Studie wurde am 24. März 1876 in Untereggen, Kt. St. Gallen, geboren. Er erhielt seine Gymnasialbildung an der Stiftsschule in Einsiedeln, wo er 1896 Mitglied des dortigen Benediktinerstiftes wurde. Nach Absolvierung der philosophischen und theologischen Studien 1902 zum Priester geweiht, war er zwei Jahre in Vevey, Kt. Waadt, in der Seelsorge und alsdann ebenso lang am Stiftsgymnasium in Einsiedeln tätig. 1906—1911 war er an der Universität Freiburg (Schweiz) immatrikuliert, wo er bei den Herren Professoren *Daniels*, *v. Kowalsky*, *Bistrzycky*, *v. Estreicher*, *Girardin* Vorlesungen über allgemeine und angewandte Mathematik, experimentelle und theoretische Physik, Chemie und Kartographie hörte und an den Uebungen im physikalischen und chemischen Laboratorium teilnahm. 1909 erwarb er in den mathematischen Fächern das Lizentiatsdiplom.

Allen genannten Herren Professoren spricht der Verfasser auch an dieser Stelle für alle Anregungen und Förderungen seinen tiefgefühlten Dank aus.

Inhaltsübersicht.

	Seite
Einleitung	5
Theorie der Punktsymbole	10
Sätze aus der elliptisch-hyperbolischen Geometrie	18
Sätze aus der parabolischen Geometrie	51